Über einige mehrdeutige Verwandtschaften zweier Ebenen.

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Hohen Philosophischen Fakultät der Universität Rostock

vorgelegt von

Arno Kleber

aus **Dresden.**

Weida i. Th.
Druck von Thomas & Hubert
Spezialdruckerei für Dissertationen
1911.

Gedruckt
mit Genehmigung der hohen philosophischen Fakultät
der Universität Rostock.
Referent: Professor Dr. Staude.
Tag der mündlichen Prüfung: 31. Juli 1911.

Herrn Geheimrat Krause
in Dankbarkeit zugeeignet.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41553615_0068

Einleitung.

§ 1. Fragestellungen bei der Untersuchung mehrdeutiger Transformationen. Inhaltsübersicht der vorliegenden Arbeit. Definition der zu untersuchenden Verwandtschaften.

In einer großen Reihe von Arbeiten vor allem italienischer Mathematiker sind die birationalen Transformationen nach den verschiedensten Richtungen hin untersucht worden. Nicht so vollständig hat man die mehrdeutigen Verwandtschaften durchforscht, wenn man hier die Abhandlungen über konforme Abbildung nicht mitzählt. Grundlegend für die Untersuchungen mehrdeutiger Transformationen sind die Arbeiten von Paolis[1]) über ein-zweideutige Verwandtschaften. Die Begriffe und Sätze, die Paolis gewonnen hatte, sind von Visalli[2]) in systematischer Weise auf 1--m-deutige Transformationen übertragen worden. Wir wollen kurz zusammenzustellen versuchen, welches die Hauptfragen sind, die sich bei der Betrachtung mehrdeutiger Verwandtschaften ergeben haben.

Zuerst wird man darauf geführt, die „Hauptelemente" der Verwandtschaft[3]) aufzusuchen, d. h. einerseits diejenigen Punkte, denen ganze Kurven entsprechen, andererseits diese ihnen entsprechenden Kurven und ihre Vielfachheit. Weiter achtet man auf das Zusammenfallen von Punkten: einmal können zwei Punkte desselben Systemes sich decken — ihr

---

[1]) De Paolis, Rom. Acc. L. Mem. 1877 u. 1878.

[2]) Visalli, „Memoria sulle trasformazioni geometriche N-ple", Messina, Tip. Filomena 1884.

[3]) Über alle hier einschlägigen Begriffe s. das grundlegende Buch von R. Sturm: „Die Lehre von den geometrischen Verwandtschaften".

Ort ist die „Doppelkurve“ —, zweitens kann ein Punkt mit einem seiner Bilder im andern System zur Deckung kommen, wenn die Systeme in einander gelegt sind. Von Interesse sind ferner die Realitätsverhältnisse, d. h. die Einteilung des Trägers in solche Gebiete, in denen eine bestimmte Zahl von Bildern reell ist. Das Auseinanderhalten der Bilder kann nach dem Prinzip der Riemannschen Flächen konkret vorgenommen werden[1]). Einen breiten Raum nehmen, wenn es sich speziell um Transformation von Ebenen handelt, die Untersuchungen ein, die sich auf die Abbildung von vorgegebenen Kurven, insbesondere von Geraden, beziehen. Man bestimmt das Geschlecht, die Ordnung und die Klasse der transformierten Kurve[2]) und stellt darüber allgemeine Sätze auf; man betrachtet insbesondere die Modifikationen, die diese Zahlen erfahren, wenn die gegebene Kurve in bestimmter Weise die Fundamentalpunkte passiert. Besondere Eigenschaften weist die „Grenzkurve“, d. i. die Transformierte der Doppelkurve, auf. Es werden auch Bedingungen für das Zerfallen von transformierten Kurven gegeben; zur Herleitung werden dabei die „verbundenen“ Verwandtschaften herangezogen[3]). Die Ergebnisse der Transformation liefern oft neue Kurvenerzeugungen u. s. f.[4]) Endlich hat man durch birationale Zwischentransformationen den Grad der Verwandtschaft reduziert und so gewisse typische Formen erzielt[5]).

In der vorliegenden Arbeit wird eine ein-dreideutige und ∞^1 ein-vierdeutige Verwandtschaften zweier Ebenen untersucht. Es werden die Hauptelemente bestimmt, deren Kenntnis zu tieferem Eindringen unbedingt erforderlich ist.

---

[1]) Z. B. Amson, „Über eine zwei-zweideutige Punkttransformation“, Diss., Erlangen 1904; u. Rieder, „Untersuchung einer zwei-vierdeutigen kinetographischen Verwandtschaft“, Diss., München 1907.

[2]) Z. B. Wagner, Über eine besondere zwei-zweideutige Verwandtschaft“, Diss, München 1907.

[3]) Z. B. Wiesing, „Über eine zwei-zweideutige Verwandtschaft . . .“, Diss., Breslau 1906.

[4]) Z. B. in der vorgen. Diss. von Rieder.

[5]) Jung, Rend. Lincei 1886.

Transformationen von Kurven sind nur als Mittel zu weiterhin zu besprechenden Zwecken durchgeführt, und daher ist auf die Vorausbestimmung der Ordnung usw. ganz verzichtet. Einen großen Teil der Untersuchung macht das Studium der Realitätsverhältnisse aus. Zur Ausführung der Diskussion wird die einfache Ebene mit einem Kurvensystem schlicht überdeckt. Die transformierten Kurven bedecken dann im allgemeinen die mehrfache Ebene nicht überall gleich oft. Die so entstehenden Gebiete werden durch die „Diskriminantenkurve", die mit der oben erwähnten „Grenzkurve" identisch ist, von einander gesondert. Durch dies geometrische Verfahren wird die Diskussion der kubischen resp. biquadratischen Gleichungen erreicht, die analytisch die Verwandtschaft bestimmen[1]). Der geometrischen Betrachtungsweise glauben wir vor der algebraischen hier den Vorzug geben zu sollen, da am Ende doch zur Gebietseinteilung der Ebene die algebraischen Resultate geometrisch gedeutet werden müssen. Zudem wird unsere Betrachtung gleichzeitig die Diskriminantenkurve anschaulich entstehen lassen und die Überdeckungszahlen für die verschiedenen Ebenenteile liefern.

Der Hauptteil der Untersuchung aber ist einer anderen Fragestellung gewidmet. Die drei resp. vier Punkte der einfachen Ebene nämlich, die je einem Punkt der mehrfachen Ebene entsprechen, werden als Ecken von Drei- resp. Vierecken aufgefaßt. Über die Gestalt dieser Polygone werden Sätze hergeleitet. Weiter werden auch Forderungen an ihre Gestalt erhoben; so wird der Ort aller der Punkte bestimmt, denen gleichschenklige Dreiecke entsprechen, analog der Ort aller Punkte, denen gleichschenklige Trapeze zugeordnet sind. Für die ein-vierdeutigen Verwandtschaften werden die Schnittpunktsysteme solcher geometrischer Örter

---

[1]) Der Grundgedanke der „Überdeckungszahl" ist von F. Klein in der „Elementarmathematik v. h. Stdpkte. a." zur Disk. des Typus einer zweiparametrigen Gleichung 2. und 3. Grades verwendet worden (Bd. 1 „Algebra"); in den uns vorliegenden Gleichungen ist die Abhängigkeit von den Parametern viel komplizierter.

genauer untersucht. Eine Reihe der Sätze und Methoden ist verallgemeinerungsfähig. — Im letzten Paragraphen endlich werden zwei Vierecke resp. Dreiecke der oben angegebenen Art gleichzeitig betrachtet und an ihre gegenseitige Lage eine Forderung gestellt.

Die unserer Untersuchung zugrunde gelegte Transformation steht in engem Zusammenhang mit einer von Herrn Müller aufgefundenen wichtigen kinematischen Verwandtschaft[1], die eine naturgemäße Verallgemeinerung der bekannten quadratischen Verwandtschaft darstellt. Wir be-

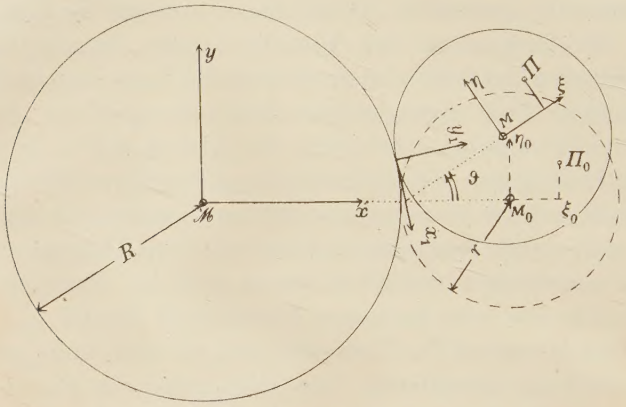


Fig. 1.

schränken uns auf die zyklische Bewegung und werden zunächst für diesen speziellen Fall die Resultate der Müllerschen Arbeit ableiten, soweit wir sie brauchen.

In der festen Ebene (x, y) liege der Kreis (1)

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

in der beweglichen Ebene (ξ, η) befinde sich der Kreis (2)

$$\xi^2 + \eta^2 = r^2.$$

Bewegt sich dann die Ebene (ξ, η) so gegen die feste Ebene (x, y), daß dabei der Kreis (2) auf dem Kreise (1) rollt, so heißt die Bewegung „zyklisch". Zu Beginn mögen

[1] Müller, Zeitschr. f. Mathematik u. Physik, Bd. 36.

die beiden Abszissenachsen x und ξ dem Richtsinn nach sich decken, während die y- und die η-Achse gleichsinnig parallel sein sollen. Mit ϑ sei der Winkel bezeichnet, den die positive Richtung der ξ-Achse in irgend einem Bewegungsmoment gegen die positive Richtung der x-Achse bildet. Hat dann ein beliebiger Punkt II in der bewegten Ebene die Koordinaten ξ und η, so wird seine Lage gegen die feste Ebene gegeben durch die Koordinaten[1])

$$\begin{aligned} x &= (R+r)\cos\frac{r}{R+r}\vartheta + \xi\cos\vartheta - \eta\sin\vartheta \\ y &= (R+r)\sin\frac{r}{R+r}\vartheta + \xi\sin\vartheta + \eta\cos\vartheta. \end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Hier ist R wesentlich positiv; r ist positiv einzuführen, wenn sich die Kreise (1) und (2) beim Rollen von außen berühren (Fig. 1); negativ ist r zu wählen, wenn Kreis (2) im Kreis (1) rollt (Fig. 2) und wenn Kreis (2) umschließend auf dem Kreise (1) rollt (Fig. 3).

Wir nehmen jetzt noch ein drittes Koordinatensystem hinzu, das von Moment zu Moment seine Lage gegen die Ebene (x, y) und auch gegen die bewegliche Ebene (ξ, η) ändert. Koordinatenanfang sei stets der Punkt, in dem sich momentan die beiden Kreise (1) und (2) berühren, d. h. der Pol der Bewegung; x_1-Achse sei die Poltangente, y_1-Achse die Polnormale. Mit der Abkürzung

$$\frac{r}{R+r} = \varkappa$$

hat man die Transformationsgleichungen:

$$\begin{aligned} x &= R\cdot\cos\varkappa\vartheta + x_1\sin\varkappa\vartheta + y_1\cos\varkappa\vartheta \\ y &= R\cdot\sin\varkappa\vartheta - x_1\cos\varkappa\vartheta + y_1\sin\varkappa\vartheta. \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

Aus dem System (I) folgert man

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= R\sin\varkappa\vartheta - y \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= -R\cos\varkappa\vartheta + x; \end{aligned} \qquad \text{(III}a\text{)}$$

[1]) In d. Einl. sind d. Gleichungen durch röm. Ziffern, i. d. Arbeit durch arab. unterschieden.

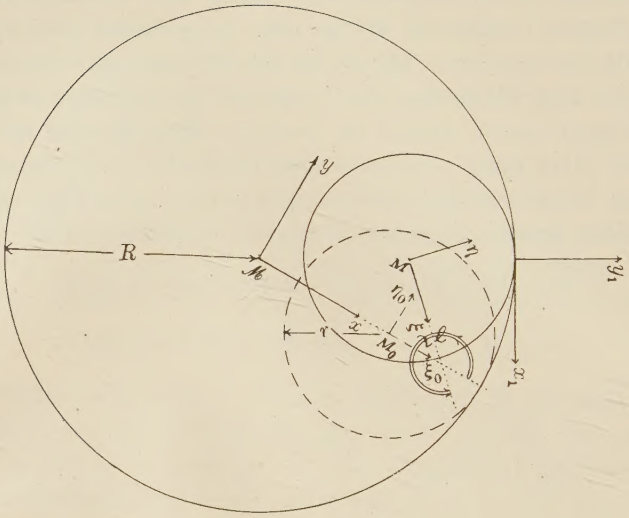


Fig. 2.

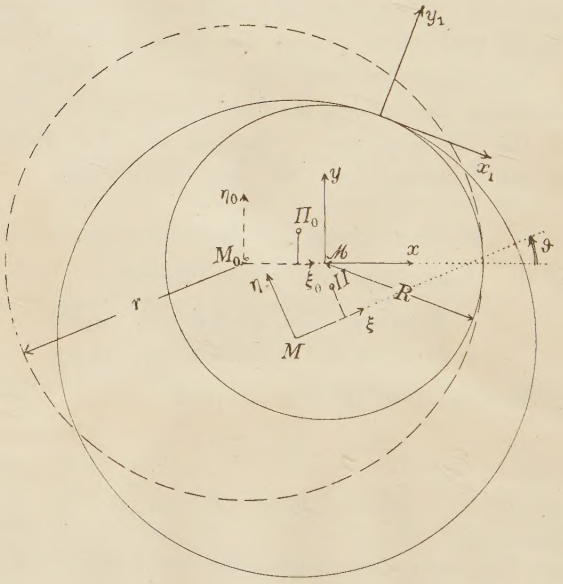


Fig. 3.

nach (II) kann man hierfür auch schreiben

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\vartheta} &= x_1 \cos \varkappa\vartheta - y_1 \sin \varkappa\vartheta \\ \frac{dy}{d\vartheta} &= x_1 \sin \varkappa\vartheta + y_1 \cos \varkappa\vartheta. \end{aligned} \tag{IIIβ}$$

Differenziert man ferner das System (IIIα) nochmals nach ϑ und beachtet die Gleichungen (IIIβ), so findet man:

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{d\vartheta^2} &= \varkappa R \cos \varkappa\vartheta - x_1 \sin \varkappa\vartheta - y_1 \cos \varkappa\vartheta \\ \frac{d^2y}{d\vartheta^2} &= \varkappa R \sin \varkappa\vartheta + x_1 \cos \varkappa\vartheta - y_1 \sin \varkappa\vartheta; \end{aligned} \tag{IIIγ}$$

schließlich liefert dasselbe Verfahren noch:

$$\begin{aligned} \frac{d^3x}{d\vartheta^3} &= -R(\varkappa+\varkappa^2) \sin \varkappa\vartheta - x_1 \cos \varkappa\vartheta + y_1 \sin \varkappa\vartheta \\ \frac{d^3y}{d\vartheta^3} &= \quad R(\varkappa+\varkappa^2) \cos \varkappa\vartheta - x_1 \sin \varkappa\vartheta - y_1 \cos \varkappa\vartheta. \end{aligned} \tag{IIIδ}$$

Aus den Formeln (IIIβ) und (IIIγ) ergeben sich jetzt sofort die zwei Beziehungen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2 &= x_1^2 + y_1^2 \\ \frac{dx}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2x}{d\vartheta^2} &= x_1^2 + y_1^2 - \varkappa R y_1. \end{aligned} \tag{IIIε}$$

Erteilt man den Koordinaten ξ und η feste Werte, so stellen die Gleichungen (I) bei variablem ϑ die Bahnkurve dar, die der Punkt $P(\xi, \eta)$ der bewegten Ebene in der festen Ebene (x, y) durchläuft. Den Krümmungsradius dieser Bahnkurve im Punkte x, y erhält man aus der Gleichung

$$\varrho = -\frac{\left[\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{d\vartheta}\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta}\frac{d^2x}{d\vartheta^2}} = \frac{(x_1^2+y_1^2)^{\frac{3}{2}}}{x_1^2+y_1^2-R\varkappa y_1};$$

der Nenner von ϱ bekommt eine kinematische Bedeutung, wenn man ihn gleich Null setzt; es erscheint dann der Wendekreis

$$W = x_1^2 + y_1^2 - 2wy_1 = 0,$$

wo offenbar gesetzt ist

$$2w = R\varkappa = \frac{Rr}{R+r}.$$

Weiterhin sind die Koordinaten X und Y des Krümmungsmittelpunktes, der zum Kurvenpunkt x, y gehört, gegeben durch die Gleichungen

$$X = x - \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \frac{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}{\frac{dx}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \frac{d^2x}{d\vartheta^2}} =$$

$$= R\cos\varkappa\vartheta + (x_1 \sin\varkappa\vartheta + y_1 \cos\varkappa\vartheta) - (x_1 \sin\varkappa\vartheta + y_1 \cos\varkappa\vartheta) \cdot \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1^2 + y_1^2 - 2wy_1}$$

also

$$X = R\cos\varkappa\vartheta - \frac{2wx_1y_1}{W} \sin\varkappa\vartheta - \frac{2wy_1^2}{W} \cos\varkappa\vartheta$$

und ähnlich (IV α)

$$Y = R\sin\varkappa\vartheta + \frac{2wx_1y_1}{W} \cos\varkappa\vartheta - \frac{2wy_1^2}{W} \sin\varkappa\vartheta.$$

Die Koordinaten X und Y beziehen sich auf das System (x, y). Um die Koordinaten X_1, Y_1 des Krümmungsmittelpunktes in bezug auf das System (x_1, y_1) zu finden, vergleichen wir (IV α) mit den Transformationsformeln (II) und entnehmen:

$$X_1 = \frac{-2wx_1y_1}{W} = \frac{-2wx_1y_1}{x_1^2 + y_1^2 - 2wy_1}$$

$$Y_1 = \frac{-2wy_1^2}{W} = \frac{-2wy_1^2}{x_1^2 + y_1^2 - 2wy_1}; \qquad \text{(IV } \beta\text{)}$$

in diesen zwei Gleichungen ist die „quadratische Verwandtschaft" analytisch formuliert. Löst man das System (IV β) nach x_1 und y_1 auf, so folgt:

$$x_1 = \frac{2wX_1^2 Y_1}{X_1^2 + Y_1^2 + 2wY_1}$$

$$y_1 = \frac{2wY_1^2}{X_1^2 + Y_1^2 + 2wY_1}. \qquad \text{(IV } \gamma\text{)}$$

Wegen einer späteren Verwendung bemerken wir noch, daß vermöge der Verwandtschaftsformeln (IV γ) den Ausdrücken

$$A = x_1^2 + y_1^2,$$

$$B = x_1^2 + y_1^2 - 2ay,$$

entsprechen die Größen

$$A' = \frac{4w^2 Y_1^2 (X_1^2 + Y_1^2)}{(X_1^2 + Y_1^2 + 2wY_1)^2},$$

$$B' = \frac{2wY_1^2}{(X_1^2 + Y_1^2 + 2wY_1)^2} \left\{(2w - 2a)(X_1^2 + Y_1^2) - 2a \cdot 2wY_1\right\}. \qquad \text{(V } \beta\text{)}$$

Die quadratische Verwandtschaft gibt die Beziehung zwischen den Koordinaten eines Bahnpunktes $P(x_1, y_1)$ und des zugehörenden Krümmungsmittelpunktes $K(X_1, Y_1)$; in der eingangs erwähnten Arbeit stellt dann Herr Müller die Verwandtschaft auf zwischen einem Bahnpunkt $P(x_1, y_1)$ und dem zugehörenden Krümmungsmittelpunkt $K_e(X_{1,e}, Y_{1,e})$ der ersten Evolute der Bahn.

Ist allgemein eine Kurve in Parameterdarstellung gegeben, etwa

$$x = x(\vartheta)$$
$$y = y(\vartheta)$$

so werden die Koordinaten des Krümmungsmittelpunktes $K_e(X_e, Y_e)$ der ersten Evolute gefunden aus den Gleichungen:

$$X_e = X - \varrho \cdot \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot \frac{dx}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}$$
$$Y_e = Y - \varrho \cdot \frac{d\varrho}{d\vartheta} \cdot \frac{dy}{d\vartheta} \cdot \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2}; \qquad \text{(VI}\alpha\text{)}$$

hierin ist, wie oben, ϱ der Krümmungsradius der Kurve im betrachteten Punkte $P(x, y)$; X und Y sind die Koordinaten des Krümmungszentrums, das P entspricht. Man hat

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{\left[\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{d\vartheta^2}}\right) = \frac{1}{\left(\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{d\vartheta^2}\right)^2} \cdot$$

$$\left\{\left[\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2y}{d\vartheta^2} - \frac{d^2x}{d\vartheta^2}\cdot\frac{dy}{d\vartheta}\right]\cdot 3\left[\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}\left[\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2y}{d\vartheta^2}\right] - \right.$$
$$\left. - \left[\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\vartheta}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\left[\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^3y}{d\vartheta^3} - \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^3x}{d\vartheta^3}\right]\right\};$$

die Gleichungen (IIIβ), (IIIγ), (IIIδ) aber liefern

$$\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2x}{d\vartheta^2} + \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^2y}{d\vartheta^2} = \varkappa R x_1 = 2wx_1$$
$$\frac{dx}{d\vartheta}\cdot\frac{d^3y}{d\vartheta^3} - \frac{dy}{d\vartheta}\cdot\frac{d^3x}{d\vartheta^3} = R(\varkappa + \varkappa^2)x_1 = 2w(1+\varkappa^2)x_1;$$

beachtet man noch die Beziehungen (IIIε), so kann man schreiben:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{2wx_1(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}}{(x_1^2+y_1^2-2wy_1)^2}\left\{(x_1^2+y_1^2)(2-\varkappa)-6wy_1\right\};$$

setzt man schließlich zur Akürzung

$$2f_1 = \frac{3Rr}{2R+r},$$

so folgt:

$$\frac{d\varrho}{d\vartheta} = \frac{6w^2x_1(x_1^2+y_1^2)^{\frac{1}{2}}}{f_1\cdot W^2}(x_1^2+y_1^2-2f_1y_1).$$

Mit diesem Werte erhält man sogleich nach (VIα) und (IVα)

$$X_e = R\cos\varkappa\vartheta - \frac{2wx_1y_1}{W}\sin\varkappa\vartheta - \frac{2wy_1^2}{W}\cos\varkappa\vartheta - \\ - \frac{6w^2x_1(x_1^2+y_1^2)}{f_1\cdot W^3}(x_1^2+y_1^2-2f_1y_1)(x_1\cos\varkappa\vartheta - y_1\sin\varkappa\vartheta)$$

$$Y_e = R\sin\varkappa\vartheta + \frac{2wx_1y_1}{W}\cos\varkappa\vartheta - \frac{2wy_1^2}{W}\sin\varkappa\vartheta - \\ - \frac{6w^2x_1(x_1^2+y_1^2)}{f_1\cdot W^3}(x_1^2+y_1^2-2f_1y_1)(x_1\sin\varkappa\vartheta + y_1\cos\varkappa\vartheta).$$

Die Koordinaten X_e und Y_e beziehen sich hier auf das System (x, y) in der festen Ebene. Die Transformation auf das System (x_1, y_1) bewirken wir wieder durch Vergleichen mit der Formel (II); wir finden:

$$\begin{aligned} X_{e,1} &= -\frac{2wx_1y_1}{W} + \frac{6w^2x_1y_1(x_1^2+y_1^2)}{f_1\cdot W^3}(x_1^2+y_1^2-2f_1y_1) \\ Y_{e,1} &= -\frac{2wy_1^2}{W} - \frac{6w^2x_1^2(x_1^2+y_1^2)}{f_1\cdot W^3}(x_1^2+y_1^2-2f_1y_1) \end{aligned} \qquad (\text{VI}\beta)$$

oder auch

$$\begin{aligned} W^3\cdot X_{e,1} &= 2wx_1y_1\frac{R}{R+r}(x_1^2+y_1^2)^2 - \\ &\quad - 4w^2x_1y_1^2(x_1^2+y_1^2) - 8w^3x_1y_1^3 \\ W^3\cdot Y_{e,1} &= -2w(x_1^2+y_1^2)^2(y_1^2+3\frac{w}{f_1}x_1^2) + \\ &\quad + 4w^2y_1(x_1^2+y_1^2)(3x_1^2+2y_1^2) - 8w^3y_1^4. \end{aligned} \qquad (\text{VI}\gamma)$$

Durch die zwei Beziehungen (VIγ) wird die von Herrn Müller gefundene Verwandtschaft zwischen einem Bahnpunkt $P(x_1, y_1)$ und dem zugehörenden Evolutenkrümmungsmittelpunkt $K_e(X_{e,1}, Y_{e,1})$ analytisch dargestellt; dabei sind

die Koordinaten beider Punkte gemessen im System Poltangente — Polnormale.

Es liegt nahe, mit Hilfe der quadratischen Verwandtschaft (IVγ) die Koordinaten x_1 und y_1 in den Gleichungen (VIγ) auszudrücken durch die Koordinaten X_1 und Y_1 des zum Punkte $P(x_1, y_1)$ gehörenden Krümmungsmittelpunktes $K(X_1, Y_1)$; dies werden wir jetzt ausführen und also die Verwandtschaft studieren, die zwischen einem Punkte $K(X_1, Y_1)$ und den zum selben Punkt $P(x_1, y_1)$ gehörenden Punkte $K_e(X_{e,1}, Y_{e,1})$ besteht. Da man vermöge (IVγ) stets zur Verwandtschaft (VIγ) zurückkehren kann, so ist im Wesentlichen mit der Kenntnis der transformierten Verwandtschaft die ursprüngliche Konfiguration (VIγ) auch durchschaut.

Zur Ausführung der Transformation benützen wir das Gleichungspaar (VIβ): die drei Ausdrücke

$$x_1^2+y_1^2,$$
$$x_1^2+y_1^2-2f_1y_1,$$
$$W=x_1^2+y_1^2-2wy_1$$

setzen wir nach (Vβ) um und finden leicht als transformierte Gleichungen:

$$\begin{aligned} 4wY_1^2\cdot X_{e,1} &= \frac{3}{f}X_1(X_1^2+Y_1^2)^2+6X_1Y_1(X_1^2+Y_1^2)+4wX_1Y_1^2 \\ 4wY_1^3\cdot Y_{e,1} &= -\frac{3}{f}X_1^2(X_1^2+Y_1^2)^2-6X_1^2Y_1(X_1^2+Y_1^2)+4wY_1^4; \end{aligned} \qquad \text{(VII)}$$

hier ist als Abkürzung gebraucht:

$$2f=\frac{3Rr}{R+2r}.$$

Die Gleichungen (VII) sind offensichtlich formal einfacher als die Beziehungen (VIγ); lediglich aus diesem Grunde werden wir im folgenden uns genauer mit der Verwandtschaft (VII) befassen, statt direkt die Müllersche Verwandtschaft (VIγ) zu betrachten.

Multipliziert man die erste der Gleichungen (VII) mit X_1 und addiert die zweite, so ergibt sich die Beziehung

$$X_1^2+Y_1^2-X_1\cdot X_{e,1}-Y_1\cdot Y_{e,1}=0; \qquad \text{(VII}\beta\text{)}$$

hierin liegt ein geometrischer Satz; sei nämlich Π der Pol der Bewegung, d. h. der Koordinatenanfang, dann ist (VIIβ) die Gleichung eines Kreises durch Π, sobald man $X_{e,1}$ und $Y_{e,1}$ festhält und X_1, Y_1 als laufende Koordinaten auffaßt: da ferner der Kreis offenbar die Strecke ΠK_e, wo K_e die Koordinaten $X_{e,1}$ und $Y_{e,1}$ hat, als Durchmesser besitzt, so können wir sagen:

Wählt man irgend einen Punkt $K_e(X_{e,1}, Y_{e,1})$, so liegen die ihm entsprechenden Punkte $K(X_1, Y_1)$ auf dem Kreise, der ΠK_e zum Durchmesser hat.

Jetzt stellen wir noch die Aufgabe: Welche Kurve erfüllen die Punkte $K_e(X_{e,1}, Y_{e,1})$, wenn die entsprechenden Punkte $K(X_1, Y_1)$ auf dem Kreise

$$X_1^2 + Y_1^2 - 2b\,Y_1 = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

liegen?

Wir haben in das Gleichungssystem (VII) einzuführen den Wert:

$$X_1^2 + Y_1^2 = 2b\,Y_1$$

und erhalten:

$$4w\,Y_1^2 \cdot X_{e,1} = 4b^2\,Y_1^2\,\frac{3}{f}\,X_1 + 2b\,Y_1 \cdot 6X_1\,Y_1 + 4w\,X_1\,Y_1^2$$

$$4w\,Y_1^3 \cdot Y_{e,1} = -4b^2\,Y_1^2\,\frac{3}{f}\,X_1^2 - 2b\,Y_1 \cdot 6X_1^2\,Y_1 + 4w\,Y_1^4;$$

kürzt man mit $4\,Y_1^2$ und ersetzt in der zweiten Gleichung X_1^2 durch $(2b\,Y_1 - Y_1^2)$, so folgt

$$w\,X_{e,1} = X_1\left(\frac{3b^2}{f} + 3b + w\right)$$

$$\frac{6b^3}{f} + 6b^2 + w \cdot Y_{e,1} = Y_1\left(\frac{3b^2}{f} + 3b + w\right):$$

kombiniert man andererseits (VIIβ) mit (VIII), so hat man

$$X_{e,1} \cdot X_1 = Y_1(2b - Y_{e,1}) \qquad \text{(IX)}$$

Sonach ergibt sich als transformierte Kurve der Kreis

$$w \cdot f \cdot X_{e,1}^2 = (2b - Y_{e,1})\,(wf\,Y_{e,1} + 6b^3 + 6b^2 f). \qquad \text{(X)}$$

Es entspricht also jedem Kreise mit der Gleichungsform (VIII) wieder ein Kreis, dessen Gleichung durch die Formel (X) gegeben wird.

Auf diese einfache Bemerkung werden wir die Untersuchung der Realitätsverhältnisse unserer Verwandtschaft

basieren. Beachtet man, daß die Beziehung (X) als biquadratische Gleichung für b gedeutet werden kann, so erkennt man, daß zu einem vorgegebenen Punkte K_e im allgemeinen vier Werte von b gehören, aber eine Ausnahme findet statt: Es ergeben sich nur drei (endliche) Werte von b, wenn

$$\frac{1}{f} = 0$$

ist. Lassen wir nur endliche Werte von R zu, so folgt:

$$r = -\frac{R}{2}.$$

Durch diese Bedingung ist der „elliptische" Fall der zyklischen Bewegung charakterisiert. Es erweist sich als zweckmäßig, diesen Sonderfall vorauszunehmen.

Teil I.

Die elliptische Bewegung.

§ 2. Die Realitätsverhältnisse der Verwandtschaft, die Diskriminantenkurve.

Da wir im folgenden nur noch im Koordinatensystem Polbahntangente-Polnormale rechnen werden, so wollen wir jetzt folgende vereinfachte Bezeichnungen festsetzen:

x, y sind die Koordinaten eines Krümmungsmittelpunktes K;

x_e, y_e sind die Koordinaten des zugehörenden Evolutenkrümmungszentrums K_e;

$x^2 + y^2 = p^2$ ist das Quadrat des Abstandes eines Punktes K vom Pol Π;

$x_e^2 + y_e^2 = p_e^2$ ist das Quadrat des Abstandes eines Punktes K_e vom Pol Π.

Im jetzt zu betrachtenden Spezialfall ist

$$w = r;$$

die Gleichung (X) in § 1 wird hier

$$r x_e^2 = (2b - y_e)(6b^2 + r y_e). \qquad (1)$$

Dieser Kreis soll „Bild"-kreis heißen im Gegensatz zum „Original"-kreise (VIII) in § 1

$$x^2+y^2-2by=0 \qquad (2)$$

Faßt man in (2) die Größe b als variablen Parameter auf, so stellt diese Gleichung ein Kreisbüschel dar; abgesehen von dem Grunddoppelpunkte $\Pi\,(0,0)$ überdeckt dieses Büschel die Ebene genau einmal; jeder Punkt $K(x,y)$ kommt also nur auf einen Originalkreis zu liegen.

Nun betrachten wir die Bildkreise (1). Auch diese haben ihre Zentren auf der Polnormalen

$$x_e=0.$$

Sie werden daher von ihr je in zwei Gegenpunkten A und B geschnitten, deren Koordinaten aus (1) leicht bestimmbar sind:

Punkt A: $\quad (x_e)_A=0; \quad (y_e)_A=-\frac{6}{r}\cdot b^2; \qquad (3\alpha)$

Punkt B: $\quad (x_e)_B=0; \quad (y_e)_B=+2b. \qquad (3\beta)$

Anderseits schneidet aber auch jeder Originalkreis auf der Polnormale die Strecke $2b$ aus, d. h. Bildkreis und Originalkreis berühren sich auf der Polnormale im Punkte $B\,(0,2b)$.

Zuerst denken wir b positiv, von Null an wachsend. Die Originalkreise (2) liegen dann ganz in der Halbebene der positiven y-Werte. Die Lage der Bildkreise aber stellen wir fest, indem wir verfolgen, wie sich ihre Gegenpunkte A und B mit wachsendem b auf der Polnormale verschieben. Die Gleichungen (3α) und (3β) lehren sofort: Mit wachsendem, positiven b entfernen sich A und B monoton in entgegengesetztem Sinne vom Koordinatenanfang Π. Jeder Bildkreis schließt demnach seine sämtlichen Vorgänger ein, d. h. die Bildkreise überdecken bei positivem b die ganze Ebene genau einmal. Diese einfachen Verhältnisse veranschaulicht Fig. $4a$.

Jetzt sei zweitens b negativ und $|b|$ wachse wieder von Null an über alle Grenzen. Die Originalkreise erfüllen hier die negative y-Halbebene. Wie oben betrachten wir die Bewegung der Gegenpunkte A und B bei wachsendem $|b|$. Diesmal durchlaufen beide Punkte die Polnormale vom Ur-

sprung Π an in gleichem, nämlich negativem Sinne. Solange $|b|$ kleiner als $\frac{1}{3}r$ ist, eilt der Punkt B dem Punkte A voran; der Originalkreis umschließt dann sein Bild und berührt es in B. Hat $|b|$ den Wert $\frac{1}{3}r$ erreicht, so decken sich momentan A und B: der Bildkreis ist in den Punkt D $(0, -\frac{2}{3}r)$ zusammengeschrumpft. Wächst $|b|$ noch weiter,

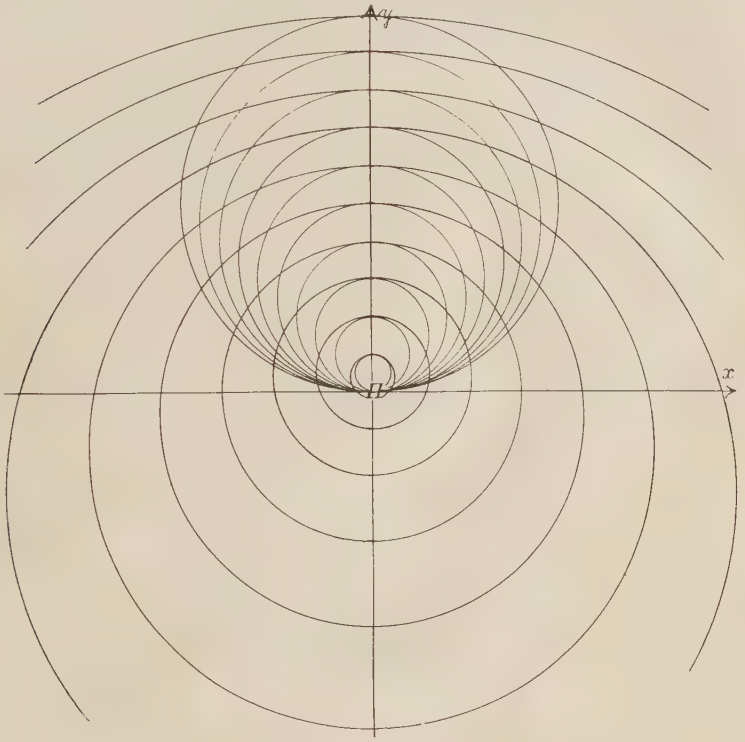


Fig. 4α.

dann liegt B dauernd zwischen Π und A; Bild und Original berühren sich von außen in B. Schließlich wachsen beide über alle Grenzen. Vergl. Fig. 4β.

Die Bildkreise, die wir jetzt gefunden haben, überdecken nicht die ganze Ebene, sondern nur einen Teil, und zwar den Innenraum ihrer Einhüllenden. Dieser Ebenenteil

aber wird doppelt bedeckt. Die Peripherie jedes Bildkreises nämlich wird durch die zwei Berührungspunkte, die er mit der Hüllenden gemein hat, in einen oberen und einen unteren

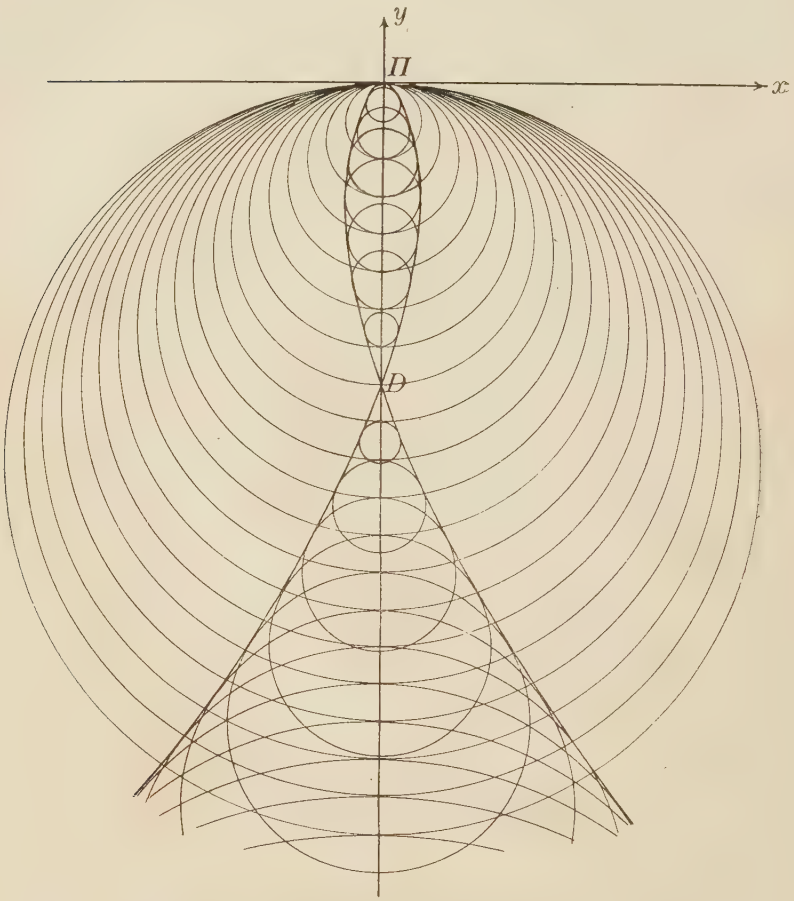


Fig. 4β.

Bogen zerlegt. Jeder Punkt liegt dann einmal auf einem oberen Teil eines Bildkreises und einmal auf einem unteren Teil (Fig. 4β). Befindet sich endlich ein Punkt K_e auf der Hüllenden, so kommt er nur auf einen Bildkreis zu liegen.

Fassen wir nunmehr die Ergebnisse zusammen, die wir für positive und negative Werte von b erhalten haben, so dürfen wir sagen:

Durch jeden Punkt im Innern der Hüllenden laufen drei Bildkreise:

jeder Punkt auf der Hüllenden liegt auf zwei Kreisen;

jeder Punkt der übrigen Ebene ist nur auf einem Bildkreis gelegen.

Jetzt sei ein Originalkreis und sein Bild gegeben. $B\,(0, 2b)$ sei wieder ihr Berührungspunkt. Wie sind die Punkte auf Bild und Original einander zugeordnet? Gleichung (IX) in § 1 lautet in der vereinfachten Bezeichnung:

$$x x_e = y\,(2b - y_e):$$

hierin sind x und y die Koordinaten eines Originalpunktes, x_e und y_e die Koordinaten des entsprechenden Bildpunktes. Fassen wir aber für einen Augenblick x_e und y_e als laufende Koordinaten auf, so stellt die Gleichung (IX) eine Gerade dar, die durch den Punkt $B\,(0, 2b)$ und auch durch den Punkt $K\,(x, y)$ geht; denn die Substitution:

$$x_e = x, \quad y_e = y$$

führt Gleichung (IX) in die Identität (2) über; deuten wir endlich x_e und y_e als Koordinaten des Bildpunktes $K_e\,(x_e, y_e)$, so lehrt Gleichung (IX), daß die Gerade auch noch durch K_e geht; dies gibt den Satz: Bild- und Originalpunkt liegen immer auf einem Strahl durch B, den gemeinsamen Punkt des Bild- und Originalkreises. Lassen wir den Strahl durch B sich drehen, so erkennen wir, daß der Bildpunkt den Bildkreis einmal durchlaufen hat, wenn der Originalkreis vom Originalpunkt einmal durchlaufen worden ist (Fig. 5). Daraus folgt nun: 1. Der Bildkreis ist ganz von Bildern reeller Originale erfüllt. 2. Ist ein Bildkreis gegeben und auf ihm ein Bildpunkt K_e, so ist auf dem zugehörenden Originalkreise eindeutig der Punkt K bestimmbar, der als Original zum Bilde K_e gehört. Hier-

nach ist es leicht anzugeben, wieviel Originale einem vorgegebenen Punkte K_e entsprechen.

Da nämlich die Originalkreise die Ebene genau einmal überdecken, so haben wir in den Punkten der sämtlichen Bildkreise auch alle Punkte K_e gefunden, die reellen Originalen K entsprechen. Umgekehrt folgt daraus: Einem Bildpunkte K_e entsprechen soviele reelle Originalpunkte, als Bildkreise durch ihn hindurchgehen. Diese Zahl haben wir

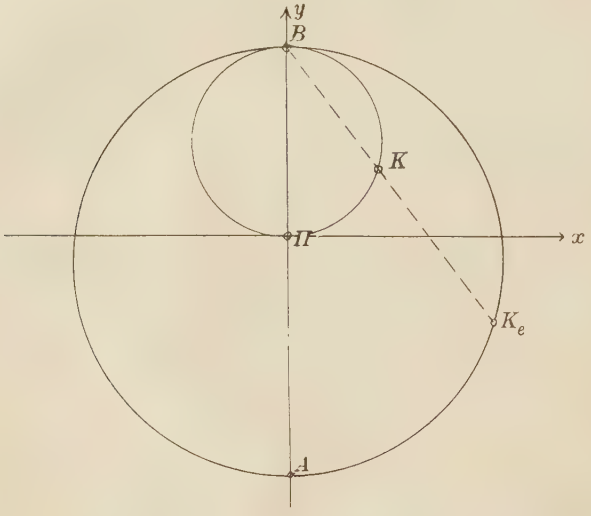


Fig. 5.

aber für die verschiedenen Teile der Ebene oben bestimmt. Mit den früheren Ergebnissen zusammengefaßt heißt das:

Die Verwandtschaft ist
ein-dreideutig im Innern der Hüllenden,
ein-zweideutig auf der Hüllenden,
ein-eindeutig in der übrigen Ebene.

Um noch die Gleichung der Hüllenden zu finden, haben wir die Gleichung (1) partiell nach b abzuleiten und aus der so entstandenen Relation mit Hilfe von (1) den Parameter b zu eliminieren. Das Eliminationsergebnis wird offenbar bis auf einen konstanten Faktor mit der Diskriminante der

Gleichung (1) übereinstimmen, wenn man diese als kubische Gleichung für b ansieht. Aus diesem Grunde werden wir die obige Hüllende als „Diskriminantenkurve“ bezeichnen. Man findet für ihre Gleichung

$$2y_e^3[x_e^2+(y_e+\tfrac{2}{3}r)^2]+3rx_e^2(3x_e^2+4y_e^2)=0. \qquad (4)$$

Der Punkt $D(0,-\frac{2}{3}r)$, den wir schon erwähnt haben, ist reeller Doppelpunkt der Kurve (4); wir setzen noch zur Abkürzung

$$x_e^2+(y_e+\tfrac{2}{3}r)^2=P_e^2; \qquad (5)$$

dann ist P_e der Abstand eines beliebigen Punktes $K_e(x_e,y_e)$ von D; hiermit schreibt sich die Gleichung (4) in der Form:

$$2y_e^3P_e^2+3rx_e^2(3x_e^2+4y_e^2)=0.$$

§ 3. Abbildung des Strahlbüschels mit dem Scheitel D; geometrische und analytische Ausnützung der sich hierbei ergebenden Resultate.

Aus einem Originalpunkt K kann man sich konstruktiv ohne weiteres den zugehörenden Punkt K_e verschaffen, z. B. unter Zuhilfenahme des Original- und Bildkreises. Nun sollen umgekehrt zu einem Punkte K_e die drei entsprechenden Punkte K gefunden werden. Von diesen können nach dem obigen auch zwei imaginär sein oder zusammenfallen, dem Punkte Π — und ihm allein — entsprechen sogar drei zusammenfallende Punkte. Zur Lösung der gestellten Aufgabe behandeln wir zunächst die Frage:

Durch den Punkt D laufe irgend eine Gerade, die wir als Träger einer Punktreihe K_t auffassen; welche Kurve erfüllen die entsprechenden Punkte K?

Jede Gerade der bezeichneten Art hat die Gleichung

$$\lambda x_e-(y_e+\tfrac{2}{3}r)=0 \qquad (6)$$

die Verwandtschaftsgleichungen (VII, § 1) lauten in dem speziellen Falle der elliptischen Verwandtschaft:

$$\begin{aligned}\tfrac{2}{3}ryx_e&=x(x^2+y^2)+\tfrac{2}{3}rxy=x(x^2+y^2+\tfrac{2}{3}ry)\\ \tfrac{2}{3}ry^2y_e&=-x^2(x^2+y^2)+\tfrac{2}{3}ry^3.\end{aligned} \qquad (7)$$

Aus der zweiten Beziehung folgert man noch

$$\tfrac{2}{3} r y^2 (y_e + \tfrac{2}{3} r) = (\tfrac{2}{3} r y - x^2)(x^2 + y^2 + \tfrac{2}{3} r y). \qquad (7\alpha)$$

Ersetzt man nun in (6) die Größen x_e und $(y_e + \frac{2}{3} r)$ nach (7) und (7α) durch die Koordinaten x und y, so spaltet sich ersichtlich das Eliminationsergebnis in zwei Faktoren, nämlich es findet sich

$$(x^2 + y^2 + \tfrac{2}{3} r y)(\lambda x y + x^2 - \tfrac{2}{3} r y) = 0.$$

Der erste Faktor ist von λ unabhängig: er muß auftreten, weil die Gerade (6) durch den Punkt D geht. Dieser Punkt ist, wie wir oben besonders hervorgehoben haben, das degenerierte Bild des Originalkreises, der sich für den Parameterwert

$$b = -\tfrac{1}{3} r$$

ergibt, d. h. nach (2) des Originalkreises

$$x^2 + y^2 + \tfrac{2}{3} r y = 0.$$

Nehmen wir in Gleichung (6) λ variabel an, so haben wir das Resultat: Dem Geradenbüschel (6) entspricht das Kegelschnittbüschel

$$x^2 - \tfrac{2}{3} r y + \lambda x y = 0. \qquad (8)$$

Von den vier Grundpunkten dieses Büschels fallen drei in den Koordinatenanfang H, der vierte ist der unendlich ferne Punkt der y-Achse. Ist nun erstlich die betrachtete Gerade durch D parallel zur x-Achse, ist also λ verschwindend klein. so entspricht ihr nach (8) eine Parabel. Verschwindet aber $\frac{1}{\lambda}$, so entartet der entsprechende Kegelschnitt in das Koordinatenkreuz. Im allgemeinen Falle setzen wir die quadratischen Glieder von (8) in die Form

$$\lambda x \left(y + \tfrac{1}{\lambda} x \right)$$

und erkennen hieraus: Der Kegelschnitt ist eine Hyperbel; die eine Asymptote ist immer parallel der y-Achse; die zweite aber steht senkrecht zu derjenigen Geraden des Büschels (6), der die betrachtete Hyperbel vermöge der Verwandtschaft entspricht. Läßt man ferner in der Gleichung (8) die Größe x sich dem Werte $\frac{2}{3} \frac{r}{\lambda}$ nähern, so wächst gleichzeitig y über

alle Grenzen, d. h. die zur y-Achse parallele Asymptote geht durch den Punkt $\frac{2}{3}\frac{r}{\lambda}$ der x-Achse; dies ist aber genau derselbe Punkt, in dem die Gerade (6) die x-Achse schneidet, die zum gleichen Werte von λ gehört. Da endlich jede Hyperbel (8) die x-Achse im Koordinatenanfang II berührt,

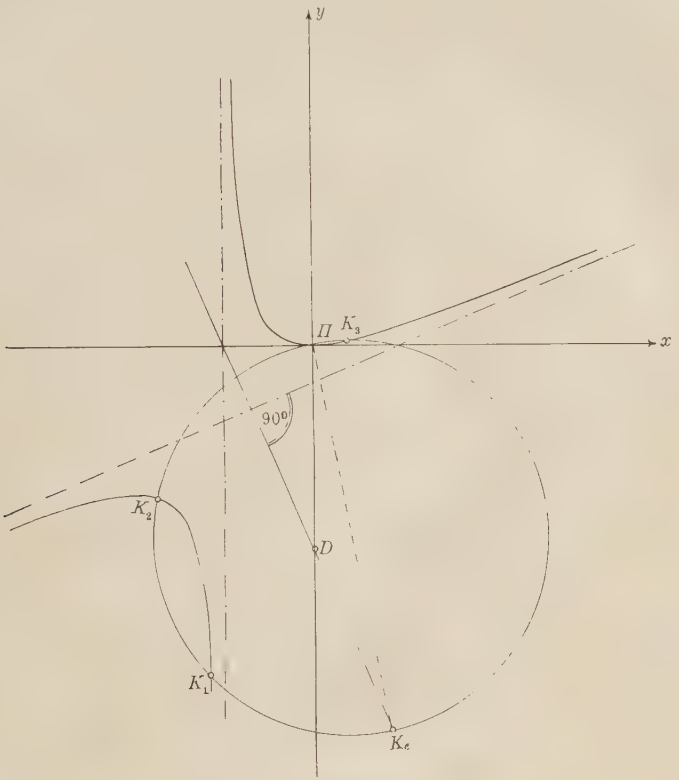


Fig. 6.

so muß die zweite Asymptote durch den Punkt $-\frac{2}{3}\frac{r}{\lambda}$ der x-Achse gehen (Fig. 6).

Man kann hiernach in einfachster Weise zu jeder Geraden durch D den ihr entsprechenden Kegelschnitt (8) konstruktiv punktweise ermitteln, da man die Asymptoten und einen Punkt, nämlich II, sofort angeben kann.

Weiterhin ist es dann möglich, die drei Punkte $K(x, y)$ zeichnerisch zu bestimmen, die einem gegebenen Punkte $K_e(x_e, y_e)$ entsprechen: Man verbinde zuerst K_e mit D und zeichne die Hyperbel, die dieser Geraden entspricht; darauf schlage man über ΠK_e den Kreis (§ 1, Folgerung aus VIIβ); er schneidet die Hyperbel in Π und den drei verlangten Punkten K (Fig. 6).

Führen wir in Gleichung (8) den Wert von λ aus (6) ein, so ergibt sich eine neue Beziehung zwischen den Koordinaten x, y und x_e, y_e, nämlich:

$$y = \frac{x_e \cdot x^2}{\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) \cdot x}; \tag{9}$$

hiermit ist y rational durch x dargestellt. Eliminiert man ferner y aus den Gleichungen (9) und (IX, § 1), so folgt

$$b = \frac{r x_e}{3x} - \frac{r}{3}.$$

Diesen Wert von b kann man substituieren in die kubische Gleichung (1, § 2)

$$b^3 - \tfrac{1}{2} y_e \cdot b^2 + \tfrac{1}{6} r y_e \cdot b - \tfrac{r}{12}(x_e^2 + y_e^2) = 0 \tag{10}$$

und findet mit Benutzung der Abkürzung (5, § 2) für die Koordinate x die kubische Gleichung:

$$x^3 - 2r \frac{x_e(y_e + \frac{2}{3} r)}{P_e^2} \cdot x^2 + \tfrac{2}{3} r \frac{x_e^2}{P_e^2} (y_e + 2r) \cdot x - \tfrac{4}{9} r^2 \frac{x_e^3}{P_e^2} = 0. \tag{11}$$

Entfernt man aus den Gleichungen (9) und (2, § 2) die Größe x^2, so folgt:

$$y = 2b - \tfrac{2}{3} r + \frac{y_e + \frac{2}{3} r}{x_e} \cdot x. \tag{12}$$

Um nun auch die kubische Gleichung aufzustellen, der die Koordinate y genügt, bilden wir die symmetrischen Grundfunktionen der drei Wurzeln y_1, y_2, y_3, d. h.

$$\Sigma y_1, \ \Sigma y_1 y_2, \ y_1 y_2 y_3.$$

Aus (12) folgt

$$\Sigma y_1 = 2 \Sigma b_1 - 2r + \frac{y_e + \frac{2}{3} r}{x_e} \Sigma x_1 =$$

$$= y_e - \frac{x_e^2}{P_e^2} \cdot 2r;$$

hierbei ist natürlich Σb_1 aus (10) und Σx_1 aus (11) entnommen. Aus (9) schließt man:

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{x_e^3 \cdot (x_1 x_2 x_3)^2}{\prod\limits_{(\alpha)} [\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) x_\alpha]};$$

das Produkt im Nenner finden wir, indem wir die linke Seite der Gleichung (11) für

$$x = \frac{\frac{2}{3} r x_e}{y_e + \frac{2}{3} r}$$

berechnen und das Resultat mit $(y_e + \frac{2}{3} r)^3$ multiplizieren; es ergibt sich

$$\prod_{(\alpha)} [\tfrac{2}{3} r x_e - (y_e + \tfrac{2}{3} r) x_\alpha] = (\tfrac{2}{3} r)^3 \frac{x_e^3}{P_e^2}, \qquad (13)$$

also wird

$$y_1 y_2 y_3 = \frac{2}{3} r \frac{x_e^4}{P_e^2}.$$

Ähnlich findet sich aus (9) mittels der symmetrischen Funktionen der Wurzeln von (11):

$$\Sigma y_1 y_2 = -\frac{8 r x_e^2 y_e}{3 P_e^2}.$$

Die kubische Gleichung für y lautet demnach:

$$y^3 - \left(y_e - 2r \frac{x_e^2}{P_e^2}\right) y^2 - \frac{8 r x_e^2 y_e}{3 P_e^2} \cdot y - \frac{2}{3} r \frac{x_e^4}{P_e^2} = 0. \qquad (14)$$

Wir kleiden das Hauptresultat in den Satz: Die drei kubischen Gleichungen (10), (11) und (14) können durch Tschirnhausen-Transformationen ineinander übergeführt werden. Jede der drei Größen x, y, b ist also durch jede unter ihnen rational darstellbar, sogar ganz und rational, z. B.

$$x = \frac{1}{P_e^2} \left\{ 4 (y_e + \tfrac{2}{3} r) b^2 + 2 x_e^2 b + \tfrac{2}{3} r [y_e (y_e + \tfrac{2}{3} r) - x_e^2] \right\},$$

$$y = \frac{x_e}{P_e^2} \left\{ 4 b^2 - 2 (y_e + \tfrac{2}{3} r) b + \tfrac{2}{3} r (2 y_e + \tfrac{2}{3} r) \right\} \text{ u. s. f.}$$

Nunmehr können wir auch die Fundamentalpunkte der Verwandtschaft angeben, ebenso die Punkte, die sich selbst entsprechen. Wir setzen zuerst in (11) und (14)

$$x_e = 0$$

und finden

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; \qquad y_1 = y_e,\ y_2 = y_3 = 0;$$

d. h. jedem Punkte K_e auf der Polnormale entspricht einmal der ihn deckende Punkt K und doppelt zählend der Pol Π $(0,0)$; demgemäß entspricht dem Pole selbst, falls man ihn als einen Punkt K_e betrachtet, der dreifach zählende Pol. Dies Ergebnis wird anschaulich, wenn wir an die Bild- und Originalkreise (§ 2) zurückdenken und uns der Realität wegen auf den negativen Teil der Polnormale beschränken. Jeder Punkt dieses Halbstrahles kommt ja auf drei Bildkreise zu liegen und zwar einmal als ein Punkt B (s. o.) und zweimal als ein Punkt A. Im ersten Falle fällt er mit seinem Original zusammen, im zweiten Falle ist er Bild des Poles; man erkennt dies, wenn man in Fig. 5 den Strahl durch B, der immer Bild und Original trägt, gedreht denkt, erstens bis er der Poltangente parallel wird, zweitens bis er in die Polnormale fällt.

Nach dieser Vorbemerkung suchen wir die Fundamentalpunkte der Verwandtschaft, indem wir fragen: Gibt es Punkte K oder K_e, denen eine ganze Kurve entspricht? Die Gleichungen (7) in § 3 lehren, daß x_e und y_e nur dann nicht eindeutig und bestimmt durch x und y gefunden werden können, wenn gleichzeitig x und y verschwinden, d. h. wenn $K(x,y)$ in den Pol Π $(0,0)$ fällt. Der Pol aber ist nach dem Obigen wirklich ein Fundamentalpunkt K der Verwandtschaft, da ihm die sämtlichen Punkte K_e der Polnormale entsprechen.

Andererseits zeigen die Gleichungen (11) und (14), daß einem Punkte K_e stets drei bestimmte Punkte K entsprechen, ausgenommen den Fall, daß die Koeffizienten der zwei Gleichungen unbestimmt werden; das tritt dann und nur dann ein, wenn $P_e^2 = x_e^2 + (y_e + \frac{2}{3}r)^2 = 0$

ist, d. h. wenn der Punkt D $(0, -\frac{2}{3}r)$ (vergl. § 2, Schluß) als Punkt K_e gewählt wird. Dieser Punkt aber ist auch wirk-

licher Fundamentalpunkt der Verwandtschaft: ihm entspricht ja der Originalkreis

$$x^2+y^2+\tfrac{2}{3}ry=0.$$

Die Punkte endlich, die sich selbst entsprechen, findet man, indem man in (7, § 3)

$$x_e=x,\quad y_e=y$$

einführt; es zeigt sich, daß nur die Polnormale von Punkten der verlangten Art erfüllt ist, was schon oben festgestellt worden war.

§ 4. Untersuchung solcher Dreiecke, deren drei Ecken je demselben Punkte K_e entsprechen.

Vermöge der betrachteten Verwandtschaft gehören einem Punkte $K_e\,(x_e, y_e)$ drei Punkte zu: $K_1\,(x_1, y_1)$, $K_2\,(x_2, y_2)$, $K_3\,(x_3, y_3)$, deren Koordinaten den Gleichungen (11) und (14) genügen. Dabei sind die drei Werte von x und y, die sich aus (11) und (14) ergeben, so zu Koordinatenpaaren x_α, y_α zusammen zu ordnen, daß die Gleichung (9, § 3) erfüllt ist, also

$$y_\alpha=\frac{x_e\cdot x_\alpha^2}{\frac{2}{3}rx_e-(y_e+\frac{2}{3}r)x_\alpha}\quad(\alpha=1,2,3).\qquad(9a)$$

Wir beschäftigen uns jetzt mit dem Dreiecke $K_1K_2K_3$, dessen Ecken dem beliebigen, aber als bekannt angenommenen Punkte K_e entsprechen. Bereits früher [§ 1, Folgerung aus (VIIβ)] wurde gezeigt, daß der Umkreis dieses Dreiecks die Strecke $\overline{\Pi K_e}$ als Durchmesser hat, also mit K_e gegeben ist. Nun bestimmen wir den Schwerpunkt des Dreiecks $K_1K_2K_3$. Die Koordinaten desselben seien ξ und η. Dann ist

$$\xi=\tfrac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)=\tfrac{2}{3}r\,\frac{x_e(y_e+\frac{2}{3}r)}{P_e^2},$$

$$\eta=\tfrac{1}{3}(y_1+y_2+y_3)=\tfrac{1}{3}y_e-\tfrac{2}{3}r\,\frac{x_e^2}{P_e^2},$$

wie aus (11) und (14) folgt. Beide Koordinaten sind leicht zu konstruieren. Verbindet man nämlich K_e mit $D\,(0,-\frac{2}{3}r)$ und fällt von Π auf K_eD das Lot ΠQ, so hat Q die Ab-

szisse ξ und die Ordinate $\eta - \frac{1}{3} y_e$. Hiermit kann dann auch der Schwerpunkt des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ als bekannt angesehen werden (Fig. 7).

Von den eben gefundenen Resultaten aus erledigen wir die Frage: Gibt es Punkte K_e, denen ein gleichseitiges Dreieck $K_1 K_2 K_3$ entspricht?

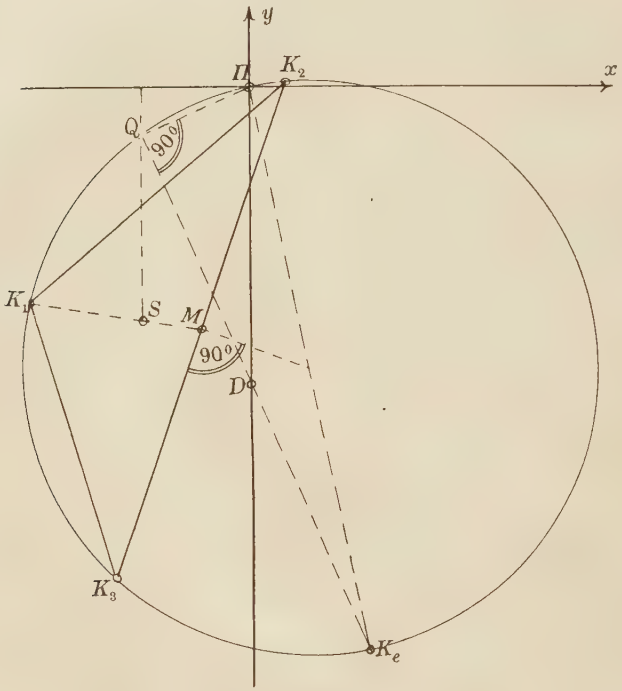


Fig. 7.

Soll $K_1 K_2 K_3$ gleichseitig sein, so muß der Schwerpunkt mit dem Zentrum des Umkreises zusammenfallen; konzidieren umgekehrt diese beiden Punkte, so ist das Dreieck gleichseitig. Es müssen demnach die zwei Gleichungen erfüllt sein:

$$\xi = \frac{2}{3} r \frac{x_e (y_e + \frac{2}{3} r)}{P_e^2} = \frac{1}{2} x_e$$

$$\eta = \frac{y_e}{3} - \frac{2}{3} r \frac{x_e^2}{P_e^2} = \frac{1}{2} y_e;$$

aus der ersten Gleichung folgt, wenn man von dem unbrauchbaren Werte

$$x_e = 0$$

absieht, die Beziehung

$$x_e^2 + y_e^2 = \tfrac{4}{9} r^2.$$

Das ist jedoch die Gleichung eines Kreises, der die Diskriminantenkurve (§ 2) nur in ihrem Doppelpunkte $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ durchsetzt; auf seiner Peripherie finden sich also, D ausgenommen, keine Punkte K_e, denen drei reelle Punkte K_1, K_2, K_3 entsprechen; D aber kommt nicht in Betracht als Fundamentalpunkt der Verwandtschaft. Es gibt somit keinen reellen Punkt K_e, dem ein reelles gleichseitiges Dreieck entspricht.

Einer späteren Anwendung wegen lösen wir noch die Aufgabe: Gegeben ist ein Punkt K_e und einer der drei Punkte, die ihm entsprechen, etwa K_1. Es ist K_2 und K_3 zu bestimmen.

Man zieht den Umkreis des Dreieckes $K_1 K_2 K_3$, konstruiert den Schwerpunkt S und verschafft sich aus S und K_1 die Mitte der Seite $K_2 K_3$; die kleinste Sehne durch diese Seitenmitte ist selbst die Seite $K_2 K_3$ (Fig. 7).

Die Schwerpunktsabszisse ξ hat denselben Wert für alle die Punkte K_e, die auf dem gleichen Strahl durch den Punkt $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ liegen. Sucht man hingegen alle Punkte K_e, für welche die Ordinate η des Schwerpunktes eine konstante Größe η_0 hat, so ergibt sich als geometrischer Ort eine gewisse Kurve dritter Ordnung. Soll speziell η verschwinden, so wird der Ort der verlangten Punkte K_e gegeben durch die Gleichung:

$$y_e(y_e + \tfrac{2}{3}r)^2 = x_e^2(2r - y_e).$$

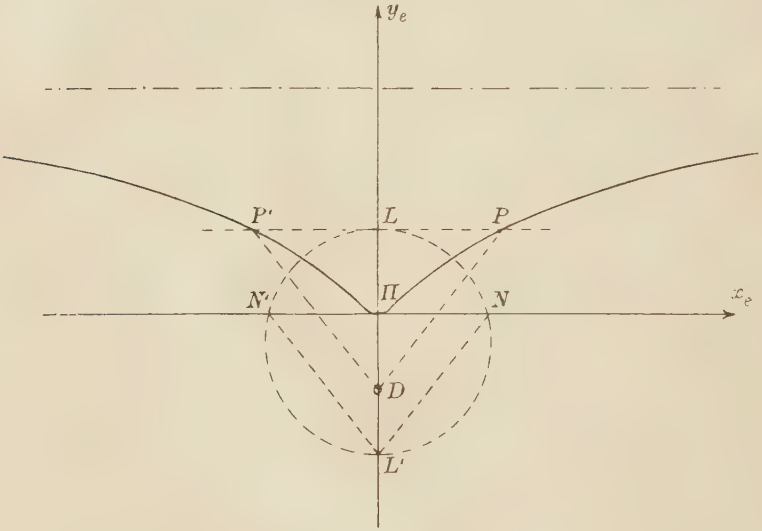
Diese Kurve (Fig. 8) verläuft ganz in dem Parallelstreifen zwischen den Geraden

$$y_e = 0 \quad \text{und} \quad y_e = 2r,$$

von denen die letztere Asymptote ist; $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ ist isolierter Punkt der Kurve. Zur punktweisen Konstruktion schlage man um einen beliebigen Punkt der y_e-Achse einen Kreis

mit dem Radius r, der die x_e-Achse in den reellen Punkten N und N' schneiden möge, die y_e-Achse aber in L und L', wo die Bezeichnung so zu wählen ist, daß L im positiven Teil der y_e-Achse liegt. L' verbindet man mit N und N' und ziehe zu $L'N$ und $L'N'$ durch $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ die Parallelen, die die Parallele zur x_e-Achse durch L in zwei Punkten P und P' der Kurve schneiden.

Daß man bei gegebenem K_e konstruktiv den Schwerpunkt und das Umkreiszentrum des Dreiecks $K_1K_2K_3$ er-



Flg. 8.

mitteln kann, liegt daran, daß die Koordinaten dieser beiden Punkte symmetrische Funktionen der Koordinaten von K_1, K_2, K_3 sind und also rational durch x_e und y_e ausdrückbar sind; man könnte z. B. ebenso den Höhenpunkt des Dreiecks K_1, K_2, K_3 finden. Diese Schlußweise bleibt für jede kubische und überhaupt für jede algebraische Verwandtschaft bestehn, falls zwei Gleichungen existieren, die unsern Gleichungen (7, § 3) entsprechen, und ebenso zwei Gleichungen entsprechend (11) und (14).

Nunmehr betrachten wir die Fläche F des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$; diese ändert bei der Vertauschung zweier Ecken ihr Vorzeichen: es wird demnach die Wurzel aus der Diskriminante einer der Gleichungen (10), (11) oder (14) als Faktor in F auftreten, je nachdem wir die Rechnung mit b, x oder y als Parameter ausführen; wir benützen hier die Größe x; es ist nun:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \left\{ (x_1 y_2 - x_2 y_1) + \ldots \right\}.$$

Aus Gleichung (9) aber schließt man:

$$x_1 y_2 - x_2 y_1 = \frac{x_e x_1 x_2^2}{\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) x_2} - \frac{x_e x_1^2 x_2}{\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) x_1} =$$

$$- \frac{\frac{2}{3} r x_e^2 x_1 x_2 (x_2 - x_1) [\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) x_3]}{\prod_{\alpha=1,2,3} [\frac{2}{3} r x_e - (y_e + \frac{2}{3} r) x_\alpha]}.$$

Permutiert man dies Resultat zweimal zyklisch und addiert alle drei Ergebnisse, so folgt unter Beachtung von (13)

$$F = \frac{1}{2} \frac{P_e^2}{\frac{2}{3} r x_e^2} (x_2^2 x_1 - x_1^2 x_2 + x_3^2 x_2 - x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3 - x_3^2 x_1);$$

das Quadrat der Klammer ist die Diskriminante von (11) und hat den Wert

$$\Delta = - \frac{4 (\frac{2}{3} r)^3 x_e^6}{P_e^8} [P_e^2 y_e^3 + \tfrac{3}{2} r x_e^2 (3 x_e^2 + 4 y_e^2)];$$

folglich wird

$$F = \frac{x_e}{P_e^2} \cdot \sqrt{-\tfrac{2}{3} r [P_e^2 y_e^3 + \tfrac{3}{2} r x_e^2 (3 x_e^2 + 4 y_e^2)]}.$$

Vergleicht man den Wert von F mit der Gleichung (4') der Diskriminantenkurve (§ 2), so erkennt man, daß längs der genannten Kurve F verschwindet; in der Tat entsprechen ja den Punkten K_e, die auf ihr liegen, Dreiecke mit zwei zusammenfallenden Ecken. Im Innern der Diskriminantenkurve ist der Radikand positiv, also F reell, außerhalb ist der Wert der Fläche imaginär im Einklang mit den obigen Erörterungen über die Realitätsverhältnisse (§ 2). Im Punkte $D\ (0, -\frac{2}{3} r)$ wird F natürlich unbestimmt, weil

D ein Fundamentalpunkt ist: längs der Polnormale verschwindet F, die drei Punkte K_1, K_2, K_3 liegen ja dann sämtlich auf der Polnormale (§ 3).

Faßt man die Gesamtheit der Punkte K_e ins Auge, welche die Schleife der Diskriminantenkurve (Fig. 4β) erfüllen, so sieht man, daß für die Randpunkte dieses geschlossenen Gebietes die zugehörenden Dreiecksflächen verschwinden. Sonach scheint zu erwarten, daß im Innern der Schleife sich Punkte K_e finden, denen Dreiecke maximaler Fläche zugehören. Wir wollen dies noch etwas genauer untersuchen. Zuerst möge der Punkt K_e eine beliebige Gerade durch $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ durchlaufen. Es ist also

$$\frac{x_e}{P_e} = k; \tag{15}$$

dann entstehen gleichzeitig ∞^1 Dreiecke $K_1 K_2 K_3$. Wir fragen nach denjenigen Punkten K_e, denen Dreiecke von maximalem Inhalt entsprechen.

Sieht man von konstanten Faktoren ab, so hat man unter der Bedingung (15) für das Quadrat der Fläche eines Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ den Ausdruck

$$F_1^2 = 2y_e^3 + 3rk^2\left(4y_e^2 + 3\frac{k^2}{1-k^2}(y_e + \tfrac{2}{3}r)^2\right);$$

soll dieser Wert ein extremer sein, so muß y_e der Gleichung genügen:

$$y_e^2 + y_e\frac{4rk^2 - rk^4}{1-k^2} + \frac{2r^2k^4}{1-k^2} = 0.$$

Wir eleminieren k mit Hilfe von (15) und erhalten so den Ort aller der Punkte K_e, denen unter der Bedingung

$$\frac{x_e}{P_e} = \text{constans}$$

Dreiecke von extremen Inhalt entsprechen. Die Elimination ergibt:

$$(P_e^2 y_e^2 + 4rx_e^2 y_e)(y_e + \tfrac{2}{3}r) + 3rx_e^4 = 0. \tag{16}$$

Nun läßt sich zeigen, daß die eben gefundene Kurve (16) die Diskriminantenkurve (4', § 2) reell nur in den zwei Punkten $H\,(0,0)$ und $D\,(0, -\frac{2}{3}r)$ schneidet und sonst ganz außerhalb

des von der Diskriminantenkurve begrenzten Gebietes verläuft (vergl. Fig. 9).

Zum Beweise schreiben wir die Gleichung (16) in der Form

$$2y_e^3P_e^2+3rx_e^2(3x_e^2+4y_e^2)=4rx_e^2\left(y_e^2+\tfrac{3}{4}x_e^2\frac{y_e+2r}{y_e+\frac{2}{3}r}\right). \quad (16')$$

Die linke Seite von (16') ergibt, gleich Null gesetzt, die Diskriminantenkurve (4'); die rechte Seite ist positiv, wenn $y_e > -\frac{2}{3}r$ ist, und ebenso, wenn $y_e < -2r$ ist; sie verschwindet, wenn

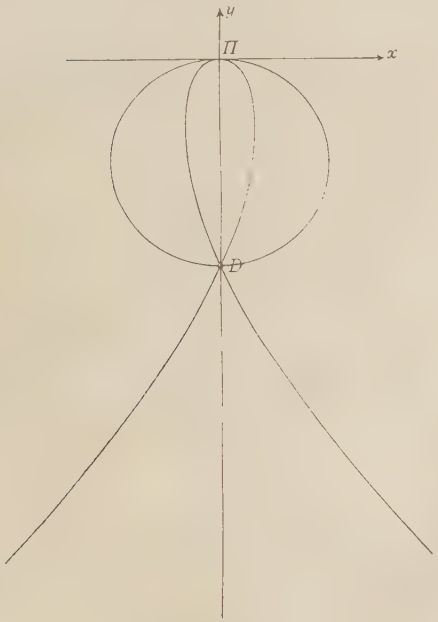


Fig. 9.

1. $x_e^2 = 0$
2. $x_e^2 = -\frac{4y_e^2(y_e+\frac{2}{3}r)}{3(y_e+2r)}$

ist; die Gleichung (16) aber liefert hieraus für y_e drei Werte:

$$y_e = 0;$$
$$y_e = -\tfrac{2}{3}r;$$
$$y_e = 2r.$$

Da der letzte Wert zu einem imaginären x_e führt, so schneiden sich also wirklich die beiden Kurven reell nur in Π und D. Nach einem bekannten Satze der Algebra ist ferner jede Wurzel x_e von (16) eine stetige Funktion von y_e, weil der Koeffizient von x_e^4 für endliche Werte von y_e nicht verschwindet. Weiter ist dann auch die rechte Seite von (16') eine stetige Funktion von y_e, die für

$$y_e = -\tfrac{2}{3}r$$

verschwindet (vergl. 16); da sie weiterhin für $y_e < -2r$ positiv ist und für keinen Wert von y_e zwischen $-\frac{2}{3}r$ und $-2r$ verschwindet, so folgt, daß sie nie negativ ist, d. h. aber: jeder

Punkt der Kurve (16), mit Ausnahme von H und D, verleiht der linken Seite von (16′) einen positiven Wert und liegt darum außerhalb des von der Diskriminantenkurve begrenzten Gebietes.

Hieraus schließt man zuerst, daß es keine Punkte K_e der verlangten Art gibt, da man doch solche Punkte K_e von der Konkurrenz ausschließen wird, denen Dreiecke mit zwei imaginären Ecken entsprechen. Ferner folgt gleichzeitig: Es gibt keinen Punkt K_e, dem ein Dreieck von absolut größtem oder kleinstem Inhalt entspricht; denn die Forderungen

$$\frac{\partial}{\partial x_e}\left\{2y_e^3\frac{x_e^2}{P_e^2}+3r\frac{x_e^4}{P_e^4}(3x_e^2+4y_e^2)\right\}=0$$

$$\frac{\partial}{\partial y_e}\left\{2y_e^3\frac{x_e^2}{P_o^2}+3r\frac{x_e^4}{P_e^4}(3x_e^2+4y_e^2)\right\}=0$$

ziehen selbstverständlich auch die Gleichung (16) nach sich. Daß nun in der Schleife der Diskriminantenkurve sich kein Punkt K_e befindet, dem ein Dreieck von maximalem Inhalt entspricht, hat seinen Grund darin, daß auf deren Berandung sich der Fundamentalpunkt D $(0,-\frac{2}{3}r)$ findet, in welchem F_1^2 je nach dem Werte von k varriiert.

§ 5. Weitere Eigenschaften der Dreiecke $K_1K_2K_3$.

Das nächste Ziel der Untersuchung ist die Bestimmung der Punkte K_e, denen gleichschenklige Dreiecke $K_1K_2K_3$ entsprechen; es werden sich auf dem Wege dahin zwei bemerkenswerte Sätze über die Winkel der Dreiecke ergeben.

Zuerst stellen wir diejenige kubische Gleichung auf, die als Wurzeln die drei Quadrate der Seitenlängen eines Dreiecks $K_1K_2K_3$ hat: ist also

$$K_1K_2=s_3,\quad K_2K_3=s_1,\quad K_3K_1=s_2,$$

so handelt es sich um die Bestimmung der symmetrischen Funktionen

$$s_1^2+s_2^2+s_3^2,\quad s_1^2s_2^2+s_2^2s_3^2+s_3^2s_1^2,\quad s_1^2s_2^2s_3^2.$$

Den Wert von $s_1^2 s_2^2 s_3^2$ gibt die bekannte Formel der elementaren Geometrie:

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 = 4F^2 d^2;$$

hierin ist F die oben berechnete Fläche des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ und d der Durchmesser des Umkreises: nach einer Bemerkung in § 4 ist

$$d = IIK_e = \sqrt{x_e^2 + y_e^2};$$

also folgt:

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 = -\tfrac{4}{3} r (x_e^2 + y_e^2) \frac{x_e^2}{P_e^4} [3 r x_e^2 (3 x_e^2 + 4 y_e^2) + 2 y_e^3 P_e^2].$$

Weiter ist

$$s_1^2 = (x_2 - x_3)^2 + (y_2 - y_3)^2;$$

nun hat man aber nach (VIIβ, § 1)

$$x_\alpha^2 + y_\alpha^2 = x_e x_\alpha + y_e y_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, 3); \qquad \text{(VII}\beta\text{)}$$

demnach ergibt sich

$$\begin{aligned} s_1^2 &= x_e (x_2 + x_3) + y_e (y_2 + y_3) - 2 x_2 x_3 - 2 y_2 y_3; \\ s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 &= 2 x_e \Sigma x_1 + 2 y_e \Sigma y_1 - 2 \Sigma x_1 x_2 - 2 \Sigma y_1 y_2. \end{aligned} \qquad (17)$$

Entnimmt man die symmetrischen Funktionen Σx_1, $\Sigma x_1 x_2$, Σy_1, $\Sigma y_1 y_2$ den Gleichungen (11) und (14), so findet man

$$s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 2 y_e \left(y_e + 2 r \frac{x_e^2}{P_e^2} \right).$$

Es bleibt noch $\Sigma s_1^2 s_2^2$ zu bestimmen; nun ist

$$2 \Sigma s_1^2 s_1^2 = (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2)^2 - (s_1^4 + s_2^4 + s_3^4);$$

also kann $\Sigma s_1^2 s_2^2$ angegeben werden, sobald Σs_1^4 gefunden ist. In Gleichung (17) treten symmetrische Funktionen von x_2 und x_3 und von y_2 und y_3 auf, die man durch x_1 resp. y_1 ganz und rational darstellen kann, z. B.

$$x_2 x_3 = \Sigma x_1 x_2 - x_1 \Sigma x_1 + x_1^2;$$

beachtet man nochmals (VIIβ), so kann man schreiben:

$$\begin{aligned} s_1^2 = x_1 \left(4 r \frac{x_e (y_e + \frac{2}{3} r)}{P_e^2} - 3 x_e \right) - y_1 \left(y_e + 2 r \frac{x_e^2}{P_e^2} \right) + \\ + \left(y_e^2 - \tfrac{4}{3} r^2 \frac{x_e^2}{P_e^2} + 4 r y_e \frac{x_e^2}{P_e^2} \right). \end{aligned}$$

Quadriert man diese Gleichung, so entsteht eine lineare Funktion der Größen:

$$x_1^2,\ y_1^2,\ x_1 y_1,\ x_1,\ y_1;$$

da man nach (9, § 3) aber setzen kann

$$x_1 y_1 = \tfrac{2}{3} r \frac{x_e}{y_e + \tfrac{2}{3} r} \cdot y_1 - \frac{x_e}{y_e + \tfrac{2}{3} r} \cdot x_1^2,$$

so vermag man das Produkt $x_1 y_1$ zu eliminieren. Bildet man dann durch zyklische Vertauschung s_2^4 und s_3^4 und addiert, so treten nur die symmetrischen Funktionen Σx_1^2, Σy_1^2, Σx_1, Σy_1 auf, deren Werte leicht aus den Gleichungen (11) und (14) berechnet werden können. Man findet als Endergebnis:

$$\Sigma s_1^2 s_1^2 = y_e^4 + \tfrac{4}{3} r y_e^3 \frac{x_e^2}{P_e^2} - 12 r^2 p_e^2 \frac{x_e^1}{P_e^1}.$$

Hieran schließen wir zunächst noch eine andere Anwendung der Methode der symmetrischen Funktionen. Die Seite $K_2 K_3$ des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ bildet gegen die x_e-Achse einen Winkel α_1, dessen Tangente gegeben wird durch die Gleichung

$$\tan \alpha_1 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2};$$

mit Benutzung der Gleichung (9, § 3)

$$y_\alpha = \frac{x_e x_\alpha^2}{\tfrac{2}{3} r x_e - (y_e + \tfrac{2}{3} r) x_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3)$$

kann man weiter schreiben:

$$\tan \alpha_1 = \frac{x_e [\tfrac{2}{3} r x_e (x_2 + x_3) - (y_e + \tfrac{2}{3} r) x_2 x_3]}{[\tfrac{2}{3} r x_e - (y_e + \tfrac{2}{3} r) x_2][\tfrac{2}{3} r x_e - (y_e + \tfrac{2}{3} r) x_3]};$$

endlich findet man nach (13, § 3)

$$\tan \alpha_1 = \frac{P_e^2}{\tfrac{2}{3} r r_e^2} \left(\tfrac{2}{3} r \frac{x_e (y_e + \tfrac{2}{3} r)}{P_e^2} - x_1 \right). \tag{18}$$

Definiert man analog

$$\tan \alpha_2 = \frac{y_1 - y_3}{x_1 - x_3},$$

$$\tan \alpha_3 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},$$

so sind α_2 und α_3 die Winkel, welche die Dreiecksseiten K_3K_1 und K_1K_2 gegen die x_e-Achse bilden; durch Permutation und Addition findet man aus (18)

$$\tan\alpha_1 + \tan\alpha_2 + \tan\alpha_3 = 0.$$

Diese Winkelbeziehung ist bemerkenswert, weil sie unabhängig ist von der Lage des Punktes K_e.

Mit Hilfe der symmetrischen Funktionen der Seitenquadrate s_α^2 ist es weiterhin möglich, den Satz zu beweisen:

Das Dreieck $K_1K_2K_3$ ist stets stumpfwinklig.

Dabei sind natürlich nur reelle Dreiecke von Interesse, und für diese allein werden wir den Satz als richtig erweisen. Die Winkel des Dreiecks $K_1K_2K_3$ seien $\beta_1, \beta_2, \beta_3$. Dann ist

$$\cos\beta_1 = \frac{s_2^2 + s_3^2 - s_1^2}{2s_2s_3};$$

denkt man jetzt die zwei anderen Winkel β_2 und β_3 durch die entsprechenden Formeln dargestellt und das Produkt der Gleichungen gebildet, so wird der Nenner rechts wesentlich positiv, nämlich $8s_1^2s_2^2s_3^2$.

Sind nun alle drei Winkel spitz, so ist das Produkt $\cos\beta_1 \cdot \cos\beta_2 \cdot \cos\beta_3$ positiv, ist ein Winkel stumpf, so ist das Produkt negativ und umgekehrt. Es kommt also darauf an, das Vorzeichen des Ausdruckes

$$A = (s_1^2 + s_2^2 - s_3^2)(s_2^2 + s_3^2 - s_1^2)(s_3^2 + s_1^2 - s_2^2)$$

zu bestimmen. Führen wir das Produkt aus, so finden wir als seinen Wert, ausgedrückt in den berechneten elementarsymmetrischen Funktionen:

$$A = 4\Sigma s_1^2 \cdot \Sigma s_1^2 s_2^2 - 8 s_1^2 s_2^2 s_3^2 - (\Sigma s_1^2)^3.$$

Führt man hierin die Werte von Σs_1^2, $\Sigma s_1^2 s_2^2$, $s_1^2 s_2^2 s_3^2$ ein, so hat man:

$$A = -\frac{32}{3} r \frac{x_e^4}{P_e^4}\left\{3r - \frac{x_e^2}{P_e^2}(3x_e^2 + 4y_e^2) + 2y_e^3\right\} \cdot \left\{P_e^2 - 2ry_e\right\}.$$

Die erste Klammer ergibt, gleich Null gesetzt, die Gleichung (4', § 2) der Diskriminantenkurve; für einen Punkt K_e im Innern der Hüllenden ist der Wert der Klammer negativ,

wie schon mehrfach benutzt worden ist. Die zweite Klammer läßt sich nach (5, § 2) in die Form setzen

$$P_e^2 - 2ry_e = x_e^2 + (y_e - \tfrac{1}{3}r)^2 + \tfrac{1}{3}r^2;$$

sie ist also wesentlich positiv. Daraus folgt aber, daß für einen Punkt K_e im Innern der Hüllenden die Größe A negativ ist; da gerade solchen Punkten K_e reelle Dreiecke $K_1K_2K_3$ entsprechen, so ist die Behauptung erwiesen.

Den Punkten K_e, für die A verschwindet, würden rechtwinklige Dreiecke entsprechen; aber in unserem Falle entarten diese Dreiecke durch Zusammenfallen zweier Ecken, wenigstens soweit sie reell sind.

Zum Schlusse verwenden wir die symmetrischen Funktionen der Größen s_1^2, s_2^2, s_3^2 zur Beantwortung der Frage: Wo liegen alle Punkte K_e, denen gleichschenklige Dreiecke $K_1K_2K_3$ entsprechen?

Sollen zwei Seiten des Dreiecks $K_1K_2K_3$ gleichlang sein, so muß die Diskriminante der Gleichung verschwinden, der die Quadrate der Seitenlängen genügen; lautet diese etwa

$$(s^2)^3 + a_1(s^2)^2 + a_2(s^2) + a_3 = 0, \tag{19}$$

so muß die Bedingung erfüllt sein:

$$27a_3^2 - 18a_1a_2a_3 + 4a_1^3a_3 + 4a_2^3 - a_1^2a_2^2 = 0. \tag{19'}$$

Die Größen a_1, a_2, a_3 stimmen bis auf die Vorzeichen überein mit $-\Sigma s_1^2$, $+\Sigma s_1^2 s_2^2$, $-s_1^2s_2^2s_3^2$. Um die Rechnung möglichst zu vereinfachen, bilden wir zunächst den Ausdruck

$$B = 4a_2 - a_1^2,$$

der mit a_2^2 multipliziert zwei Glieder von (19') liefert. Man findet

$$B = -\tfrac{16}{3}r\frac{x_e^2}{P_e^2}\left(3r\frac{x_e^2}{P_e^2}(3x_e^2 + 4y_e^2) + 2y_e^3\right);$$

die hier auftretende Klammer ist zugleich als Faktor in a_3, somit in der linken Seite der Gleichung (19') enthalten. Sie ergibt, gleich Null gesetzt, die Gleichung (4', § 2) der Diskriminantenkurve. In der Tat entspricht einem jeden Punkte K_e auf der gefundenen Kurve ein gleichschenkliges Dreieck, da ja in allen Dreiecken dieser Art zwei Ecken

zusammenfallen. Ebenso ist der noch in (19′) auftretende Faktor x_e^2 zu deuten.

Der verbleibende Teil von Gleichung (19′) ergibt, mit r gekürzt und mit P_e^8 multipliziert, als Ort der gesuchten Punkte K_e:

$$P_e^8 y_e^6 + P_e^6 [18 r x_e^2 y_e^3 (x_e^2 + y_e^2) - \tfrac{8}{3} r y_e^7] + P_e^4 x_e^2 [81 r^2 (x_e^2 + y_e^2)^2 x_e^2 - \\ - 48 r^2 y_e^4 (x_e^2 + y_e^2) - \tfrac{16}{9} r^2 y_e^6] - P_e^2 x_e^4 [216 r^3 y_e (x_e^2 + y_e^2)^2 + \\ + 32 r^3 y_e^3 (x_e^2 + y_e^2)] - 144 r^4 x_e^6 (x_e^2 + y_e^2)^2 = 0.$$

Diese Gleichung 14. Grades läßt sich aber in die einfache Gestalt bringen:

$$[P_e^2 y_e^3 + 9 r x_e^2 (x_e^2 + y_e^2)]^2 (P_e^2 - \tfrac{4}{3} r y_e - \tfrac{8}{9} r^2)^2 = 0.$$

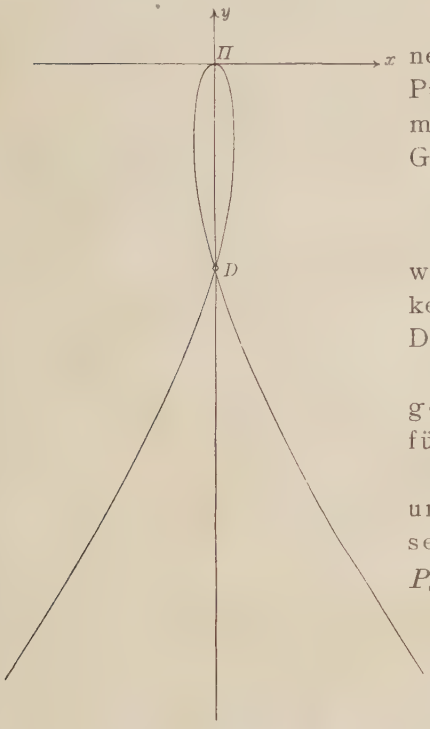


Fig. 10.

Wir erhalten sonach zwei neue Orte für die verlangten Punkte K_e; die zweite Klammer ergibt nach (5, § 2) die Gleichung

$$x_e^2 + y_e^2 - \tfrac{4}{9} r^2 = 0.$$

Dieser Kreis enthält aber, wie schon früher erwähnt (§ 4), keine Punkte K_e, denen reelle Dreiecke entsprechen.

Die erste Klammer hingegen ergibt eine Kurve fünfter Ordnung, die als eigentliche Lösung unseres Problemes angesehen werden kann:

$$P_e^2 y_e^3 + 9 r x_e^2 (x_e^2 + y_e^2) = 0; \quad (20)$$

es wird sich zeigen, daß ihren sämtlichen Punkten reelle Dreiecke entsprechen. Die Kurve selbst ähnelt gestaltlich der Diskriminantenkurve; insbesondere hat sie in $D\ (0, -\frac{2}{3} r)$ auch einen Doppelpunkt (Fig. 10).

Es sei noch erwähnt, daß man über die Struktur der Diskriminante (19′) im voraus zwei Aussagen hätte machen können. Die Größe s^2 gehört dem algebraischen Körper an, der durch b bestimmt wird. Nun lautet die Diskriminante der kubischen Gleichung (1, § 2) für b [vergl. (4, § 2)]:

$$\Delta_b = -\frac{r}{432}\{2y_e^3[9x_e^2+(3y_e+2r)^2]+27rx_e^2(3x_e^2+4y_e^2)\}:$$

sie enthält, von einem numerischen Teiler abgesehen, keinen quadratischen Faktor. Daraus folgt, daß die Gleichung (19′) durch Δ_b teilbar sein muß, wie die Rechnung oben ja auch gezeigt hat. Andererseits muß sich aber in (19′) jeder weitere irreduzible Faktor zweimal, d. h. in zweiter Potenz, vorfinden; auch dies hat sich bestätigt.

§ 6. Das Zerfallen gewisser Kurven.

Im vorigen Abschnitte ist gezeigt worden, daß durch die Gleichung (20) der Ort aller der Punkte K_e gegeben wird, denen gleichschenklige Dreiecke $K_1 K_2 K_3$ entsprechen. Jetzt wollen wir zu einem jeden solchen Punkte das ihm entsprechende gleichschenklige Dreieck konstruktiv wirklich ermitteln.

Dazu betrachten wir zuerst diejenige Kurve, in die (20) vermöge der Verwandtschaft zwischen den Punkten K_e und K transformiert wird. Zur Ausführung der Transformation ist auf (20) nach den Verwandtschaftsgleichungen (7, § 3) die Substitution auszuüben:

$$x_e = x + \frac{3x(x^2+y^2)}{2ry} \qquad (7\alpha)$$

$$y_e = y - \frac{3x^2(x^2+y^2)}{2ry^2}. \qquad (7\beta)$$

Da die Kurve (20) zweimal den Fundamentalpunkt D $(0, -\frac{2}{3}r)$ passiert, so weist das Ergebnis der Transformation zweimal den Faktor

$$x^2+y^2+\tfrac{2}{3}ry$$

auf, der, gleich Null gesetzt, den dem Punkte D entsprechenden Kreis liefert. Die Gleichung der eigentlichen transformierten Kurve aber lautet:

$$\begin{aligned}&\tfrac{2}{3}\, r^2 x^2 y^4 (x^2+y^2)\,[9x^2(x^2+y^2)^2+4r^2y^4]\\ &-[x^2y^2+(x^2-\tfrac{2}{3}ry)^2]\,[x^4+(x^2-\tfrac{2}{3}ry)y^2]^3=0.\end{aligned} \qquad (21)$$

Bevor wir uns weiter mit dieser Kurve 16ter Ordnung beschäftigen, greifen wir das Transformationsproblem nochmals direkt mit den analytischen und geometrischen Mitteln an, die wir bisher entwickelt haben.

Die Koordinaten des Schwerpunktes und des Umkreiszentrums eines Dreieckes $K_1 K_2 K_3$ sind rationale Funktionen der Koordinaten x_e und y_e des entsprechenden Punktes K_e; ebenso tritt in der Gleichung des Umkreises (VIIβ, § 1) x_e und y_e nur rational auf. Legt man also durch den Schwerpunkt und das Umkreiszentrum eine Gerade und bringt diese zum Schnitt mit dem Umkreis, so genügen die Koordinaten x und die Koordinaten y der beiden Schnittpunkte je einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten sich ganz und rational durch x_e und y_e darstellen. Soweit gilt alles für jeden Punkt K_e. Jetzt aber sei K_e ein Punkt, dem ein gleichschenkliges Dreieck $K_1 K_2 K_3$ entspricht. In diesem Falle schneidet die obige Gerade den Umkreis gerade in der Spitze des gleichschenkligen Dreieckes; dies gibt das vorläufige Resultat:

Die Koordinaten x und y der Dreiecksspitze genügen je einer quadratischen Gleichung, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x_e und y_e sind.

Andererseits genügen aber x und y den kubischen Gleichungen (11) und (14); diese zwei Gleichungen müssen demnach reduzibel werden; sie haben ja mit einer quadratischen Gleichung eine Wurzel gemein, nämlich eine Koordinate der Dreiecksspitze. Es können aber auch die Gleichungen (11) und (14) je nur eine Wurzel mit der entsprechenden quadratischen Gleichung gemein haben; sonst lägen zwei Dreiecksecken auf demselben Durchmesser des Umkreises, und, da noch dazu eine der beiden Ecken Spitze des gleichschenkligen Dreiecks sein muß, so fielen die beiden

anderen Ecken in einen Punkt zusammen, in den zweiten Endpunkt des Durchmessers; dann müßte K_e auf der Diskriminantenkurve liegen. Hiermit ist aber weiter gezeigt: auch die zwei quadratischen Gleichungen sind reduzibel; sie haben je mit der entsprechenden kubischen Gleichung einen Linearfaktor gemein. Durch diese Überlegungen ist das Resultat gefunden: Die Koordinaten x und y der Dreiecksspitze drücken sich beide rational durch x_e und y_e aus; da nun auch umgekehrt x_e und y_e durch x und y rational darstellbar sind mittels der zitierten Substitution (7, § 3), so dürfen wir sagen:

Die Kurve der Dreiecksspitzen und die Originalkurve (20) sind punktweise ein-eindeutig auf einander beziehbar, sodaß die Koordinaten eines jeden Punktes der einen Kurve rationale Funktionen der Koordinaten des entsprechenden Punktes auf der anderen Kurve sind.

Wir werden nun die bisher nur durchgedachten Schritte ausführen, allerdings in anderer Reihenfolge. Zuerst zeigen wir, daß die kubische Gleichung (14, § 3) für die Koordinate y aufspaltbar wird, falls der Punkt K_e auf der Kurve (20) liegt: um dies analytisch auszudrücken, setzen wir (20) in die Form

$$r\,\frac{x_e^2}{P_e^2} = -\frac{1}{9}\,y_e\cdot\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}; \qquad (20')$$

führt man dann in (14) für $r\,\frac{x_e^2}{P_e^2}$ seinen Wert aus (20') ein, so findet man:

$$y^3 - y_e\left(1 - \frac{2}{9}\,\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}\right)y^2 + \frac{8}{27}\,\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}\,y_e^2 y + \frac{2}{27}\,y_e^3\left(1-\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}\right) = 0. \qquad (14')$$

Dieser Gleichung genügt augenscheinlich der Wert

$$y = \frac{1}{3}\,y_e. \qquad (22\alpha)$$

Dividiert man nun (14') mit $(y - \frac{1}{3}\,y_e)$, so verbleibt die quadratische Gleichung:

$$y^2 - \frac{2}{9}\,y_e\left(3+\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}\right)y - \frac{2}{9}\,y_e^2\left(1-\frac{y_e^2}{x_e^2+y_e^2}\right) = 0. \qquad (22\beta)$$

Durch (22α) wird die y-Koordinate der Dreiecksspitze gegeben, während die zwei Wurzeln von (22β) die y-Koordinaten der beiden Basisendpunkte geben.

Das Ergebnis (22α) kann auch ohne die direkte Zerfällung der Gleichung (14) gefunden werden. Unter der Bedingung (20) hat die Gleichung (19) eine Doppelwurzel; dann können aber die drei Werte von s^2 rational durch die Gleichungskoeffizienten dargestellt werden, nämlich:

$$s_1^2 = \frac{4a_1a_2 - 9a_3 - a_1^3}{a_1^2 - 3a_2},$$

$$s_2^2 = s_3^2 = \frac{9a_3 - a_1a_2}{2(a_1^2 - 3a_2)}.$$

Die Werte der Größen a_1 a_2 a_3 sind berechnet worden: man findet unter Beachtung von (20′):

$$s_1^2 = \tfrac{4}{3} y_e^2 \left(1 - \tfrac{1}{3} \frac{y_e^2}{x_e^2 + y_e^2}\right),$$

$$s_2^2 = s_3^2 = \tfrac{1}{3} y_e^2.$$

Nun genügen ein paar geometrische Überlegungen, um die Gleichung (22α) zu erhalten. Zuerst ist die Höhe h_1 des Dreiecks $K_1 K_2 K_3$ bestimmt durch die Formel:

$$h_1 = \sqrt{s_2^2 - \tfrac{1}{4} s_1^2} = \frac{y_e}{3} \sqrt{\frac{y_e^2}{x_e^2 + y_e^2}}.$$

Der Abstand des Schwerpunktes S von der Dreiecksspitze K_1 beträgt $\frac{2}{3} h_1$; sind ξ und η, wie oben, die Koordinaten des Schwerpunktes S und ist M der Mittelpunkt des Umkreises, so entnimmt man der Fig. 11 die Proportion

$$(\tfrac{1}{2} y_e - y) : (\eta - y) = MK_1 : SK_1;$$

mit dem Werte von η (§ 4) folgt unter Beachtung von (20′) wieder das Resultat

$$y = \tfrac{1}{3} y_e.$$

Nun können wir auch die Gleichung der Kurve angeben, auf der die Spitzen der gleichschenkligen Dreiecke liegen. Dazu ist nur in der Verwandtschaftsgleichung (7β) an Stelle von y_e nach (22α) $3y$ zu setzen. Es ergibt sich die Kurve 4. Ordnung

$$x^2(x^2 + y^2) + \tfrac{4}{3} r y^3 = 0. \qquad (21\alpha)$$

Dieser Ort der Dreiecksspitzen ist natürlich ein Teil der Kurve (21), wie man durch Division auch leicht nachweist. — Die x-Koordinate der Dreiecksspitze ist noch als rationale Funktion von x_e und y_e anzugeben; man findet

$$x = \frac{2\,x_e\,y_e\,(r - y_e)}{9\,[x_e^2 + \frac{1}{3}\,y_e\,(y_e + \frac{2}{3}\,r)]}.$$

Dieser Wert von x befriedigt die kubische Gleichung (11), falls zwischen x_e und y_e die Relation (20′) besteht.

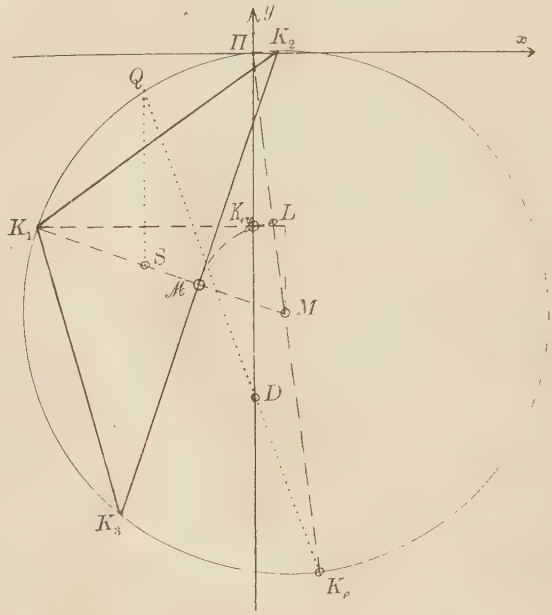


Fig. 11.

Um nun zu einem Punkte K_e, der auf der Kurve (20) gelegen sein muß, die Spitze K_1 des zugehörenden gleichschenkligen Dreieckes konstruktiv zu ermitteln, ist nur über ΠK_e der Kreis zu schlagen und im Abstand $\frac{1}{3}\,y_e$ zur x_e-Achse die Parallele zu ziehen; diese trifft den Kreis in zwei Punkten, von denen einer K_1 ist. Welcher von beiden zu wählen ist, kann mit Hilfe des Schwerpunkts S des Dreiecks $K_1\,K_2\,K_3$ leicht entschieden werden; das Dreieck $K_1\,K_2\,K_3$ ist ja stets

stumpfwinklig; wegen der Gleichschenkligkeit liegt S immer zwischen K_1 und dem Umkreiszentrum M. Dies Kriterium ist bequem, weil die Abszisse ξ von S leicht angegeben werden kann; da es sich zudem nur darum handelt, von den obigen zwei Punkten den richtigen zu wählen, so kann die Konstruktion von ξ oberflächlich ausgeführt werden. Hiernach kann punktweise die Kurve der Dreiecksspitzen (21α) aus der Kurve (20) konstruiert werden: ebenso kann man, was leicht zu sehen ist, von der Kurve (21α) zur Kurve (20) durch punktweises Zeichnen gelangen.

Es verbleibt noch die Aufgabe, auch die Kurve anzugeben, auf der die Basisendpunkte liegen. Sei also K_e ein Punkt auf der Kurve (20); dann läßt sich nach dem vorigen die eine Ecke K_1, nämlich die Dreiecksspitze, bestimmen: die zwei noch fehlenden Ecken K_2 und K_3 können darauf konstruiert werden, wie in § 4 ausgeführt worden ist. Bequemer noch ist im vorliegenden Spezialfall eine andere Konstruktion. Oben war die Dreieckshöhe

$$h_1 = \frac{y_e}{3} \cdot \frac{y_e}{\sqrt{x_e^2 + y_e^2}}$$

gefunden worden. Bezeichnet man demnach die Projektion des Punktes K_1 auf die y_e-Achse mit K_{1y} und das Umkreiszentrum wieder mit M, so ist h die Projektion der Strecke ΠK_{1y} auf ΠK_e. Diese Bemerkung gibt die Konstruktion: Man fälle von K_{1y} auf ΠM das Lot $K_{1y}L$ und schlage um M mit ML den Kreis; er trifft K_1M in M. Das Lot in M auf K_1M schneidet den Umkreis in K_2 und K_3.

Hiermit ist gezeigt, wie aus der Kurve (20) punktweise der geometrische Ort der Basisendpunkte abgeleitet werden kann. Diese zwei Kurven aber stehen in (1,2)-Korrespondenz; einem Punkte K_e auf (20) entsprechen ja zwei Punkte, nämlich K_2 und K_3, während natürlich umgekehrt wegen (7α) und (7β) einem Punkte K nur ein Punkt K_e entspricht.

Um schließlich noch die analytische Darstellung für die Kurve der Basisendpunkte zu finden, kann man die linke Seite der Gleichung (21) dividieren durch die linke Seite

von (21α); der Quotient ergibt gleich Null gesetzt die verlangte Kurvengleichung; man kann aber auch in die quadratische Gleichung (22β) die Werte von x_e und y_e aus (7α) und (7β)

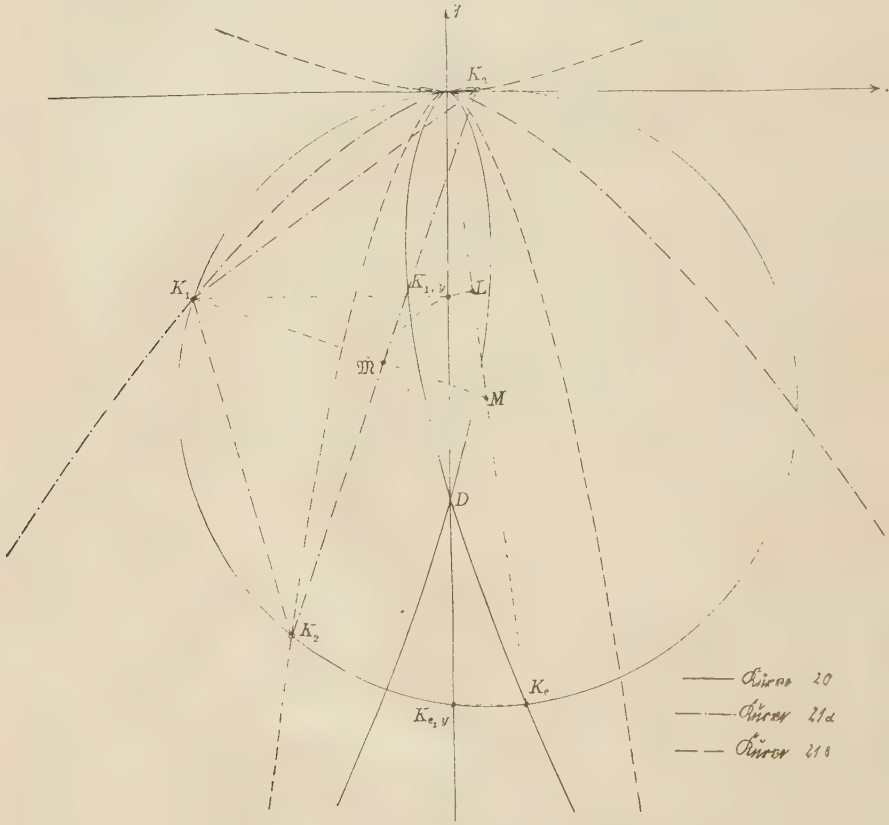


Fig. 12.

einführen. Kürzt man im letzteren Falle das Resultat noch mit $y^2(x^2+y^2)$, so ergibt sich auf beide Arten die Gleichung:

$$\begin{aligned} &2r^6(x^2+y^2)^3-\tfrac{2}{3}r(x^2+y^2)^2(4x^6y+10x^4y^3)+\\ &+\tfrac{4}{9}r^2(x^2+y^2)(2x^6y^2-5x^4y^4-x^2y^6)-\\ &-\tfrac{8}{27}r^3(10x^4y^5+8x^2y^7)-\tfrac{16}{81}r^4y^8=0. \end{aligned} \qquad (21\beta)$$

Fig. 12 zeigt die Kurve (20) und die zwei aus ihr abgeleiteten Kurven (21α) und (21β); es ist auch einmal die Konstruktion

eingetragen, die die Zuordnung der vier Punkte K_e und K_1, K_2, K_3 vermittelt.

Das Ergebnis dieser Betrachtungen kann als Satz über einen eigentümlichen Zusammenhang der Kurven (20), (21α) und (21β) so formuliert werden: Wählt man willkürlich auf (20) einen Punkt K_e und schlägt über ΠK_e den Kreis, so gibt es unter den Schnittpunkten dieses Kreises mit (21α) stets einen Punkt K_1 und unter den Schnittpunkten mit (21β) stets zwei Punkte K_2 und K_3, so daß die Strecken $K_1 K_2$ und $K_1 K_3$ gleichlang sind.

Zu ganz ähnlichen Erörterungen, wie sie sich im vorigen ergaben, werden wir nun geführt, wenn wir die Aufgabe behandeln: Es ist die Kurve zu bestimmen, die vermöge der Verwandtschaft der Diskriminantenkurve (4′) entspricht.

Dazu ist zunächst in der Gleichung (4′) x_e und y_e zu ersetzen durch x und y nach (7α) und (7β). Da die Kurve (4′) den Punkt D $(0|-\frac{2}{3}r)$ zum Doppelpunkte hat, so spaltet sich auch hier der Kreis

$$x^2+y^2+\tfrac{2}{3}ry=0$$

doppelt ab, es findet sich als Resultat der Transformation:

$$[\tfrac{2}{3}ry^3-x^2(x^2+y^2)]^3[x^2y^2+(\tfrac{2}{3}ry-x^2)^2]+$$
$$+r^2x^2y^4\{3x^2y^2(x^2+y^2+\tfrac{2}{3}ry)^2+4[\tfrac{2}{3}ry^3-x^2(x^2+y^2)]^2\}=0. \quad (23)$$

Diese Kurve 16. Ordnung muß aber zerfallen; die Aufspaltung erreichen wir wie im vorher behandelten Falle; zugleich liegt in der Methode ein allgemeiner anwendbares Beweisprinzip. — Falls ein Punkt K_e auf der Diskriminantenkurve (4′) liegt, so fallen zwei der entsprechenden Punkte K zusammen, d. h. die zwei kubischen Gleichungen (11) und (14) haben je eine Doppelwurzel. Wir betrachten die Gleichung (14) für y. Um auszudrücken, daß die betrachteten Punkte K_e auf der Diskriminantenkurve (4′) liegen, setzen wir zuerst (4′) in die Form

$$r \cdot \frac{x_e^2}{P_e^2} = -\frac{2y_e^3}{3(3x_e^2+4y_e^2)}$$

und entfernen mit Hilfe dieser Relation aus (14) den Quotienten $\frac{x_e^2}{P_e^2}$; es findet sich so die Gleichung:

$$y^3-\left(y_e+\frac{4y_e^3}{3(3x_e^2+4y_e^2)}\right)y^2+\frac{16y_e^3}{9(3x_e^2+4y_e^2)}y+\frac{4x_e^2y_e^3}{9(3x_e^2+4y_e^2)}=0. \quad (14'')$$

Berechnet man nach den schon oben benutzten Formeln die Doppelwurzel und die einfache Wurzel dieser Gleichung, so kann man auch schreiben:

$$\left(y-\frac{2}{3}y_e\right)^2\left(y+\frac{y_e x_e^2}{3x_e^2+4y_e^2}\right)=0, \quad (14''')$$

wobei die linken Seiten von (14'') und (14''') identisch übereinstimmen, wie man leicht nachrechnet. Nun stellt (14'') eine Relation zwischen y, x_e, y_e dar, die sicher erfüllt ist für alle Punkte K_e auf (4'). Ersetzt man in ihr x_e und y_e nach (7 α) und (7 β) durch x und y, so ergibt sich eine Beziehung zwischen den Koordinaten x und y, d. h. die Gleichung einer Kurve. Da aber diese Beziehung für jeden Punkt K gilt, der einem K_e auf (4') entspricht, so folgt, daß die so bestimmte Kurve den Ort aller solcher Punkte K in sich enthält, oder also, daß sie die oben gefundene Kurve (23) als Teil enthält. In der Tat zeigt eine einfache Rechnung, daß sie außer (23) noch den Nullkreis

$$x^2+y^2=0$$

enthält. Da man nun ebenso statt (14'') auch (14''') der Transformation (7 α) und (7 β) hätte unterwerfen können, so folgt unmittelbar das Resultat: Die Kurve (23) zerfällt in eine doppelt und eine einfach zählende. Die Teilkurven selbst ergeben sich, indem man die Substitutionen (7 α) und (7 β) auf die einzelnen Faktoren von (14''') anwendet, und zwar findet man als Gleichung der in (23) doppelt enthaltenen Kurve:

$$ry^3+3x^2(x^2+y^2)=0, \qquad (23\alpha)$$

während die dem dritten Faktor von (14‴) entsprechende Kurve die Gleichung besitzt:

$$x^4(x^2+y^2)^2-\tfrac{8}{3}rx^2y^3(x^2+y^2)-\tfrac{4}{3}rx^4y(x^2+y^2)+ \\ +\tfrac{4}{9}r^2x^4y^2-\tfrac{32}{27}r^3y^5=0. \qquad (23\beta)$$

Ebenso wie die Gleichung (14) zerfällt auch (11) in drei rationale Faktoren, von denen zwei gleich sind. Man kann demnach die Koordinaten x und y eines jeden Punktes K, der auf der Kurve (23α) oder auf (23β) gelegen ist, rational durch die Koordinaten x_e und y_e des entsprechenden Punktes K_e ausdrücken, wobei natürlich wegen der Beziehung (4′) eine gewisse Willkür in der Darstellung bleibt; es ist z. B.

für ein K auf (23α): $y=\frac{2}{3}y_e$; $\qquad x=\dfrac{2x_ey_e(2r-y_e)}{9x_e^2+6y_e^2+4ry_e}$;

für ein K auf (23β): $y=\dfrac{-x_e^2y_e}{3x_e^2+4y_e^2}$; $x=\dfrac{2rx_ey_e(y_e-2r)}{3y_e^3+18rx_e^2+12ry_e^2-4r^2y_e}$.

Wegen (7α) und (7β) sind diese Koordinatenbeziehungen eindeutig und rational umkehrbar, und wir haben das Resultat: Die Kurven (4′), (23α) und (23β) sind punktweise rational auf einander beziehbar und also vom gleichen Geschlecht. In bezug auf die Verwandtschaft können wir auch sagen: Längs der Diskriminantenkurve löst sich die ursprüngliche kubische Verwandtschaft auf in drei birationale, von denen zwei identisch sind.

Es ist noch zu zeigen, wie zu einem Punkte K_e auf der Diskriminantenkurve die entsprechenden Punkte K gefunden werden können. Das Dreieck $K_1K_2K_3$ ist hier zu einer doppelt gelegten Sehne KK_3 des Kreises über ΠK_e entartet, wo in K die Punkte K_1 und K_2 vereint zu denken sind. Der Schwerpunkt S, der nach § 4 als bekannt anzusehen ist, teilt KK_3 im Verhältnis 1 : 2. Zieht man nun, um K zu bestimmen, im Abstand $\frac{2}{3}y_e$ zur x_e-Achse die

Parallele, die den Kreis über ΠK_e zweimal trifft, so kann aus der Lage von S erschlossen werden, welcher der beiden Schnittpunkte K ist. Schließlich schneidet die Verbindungslinie von K mit S den Kreis in K_3.

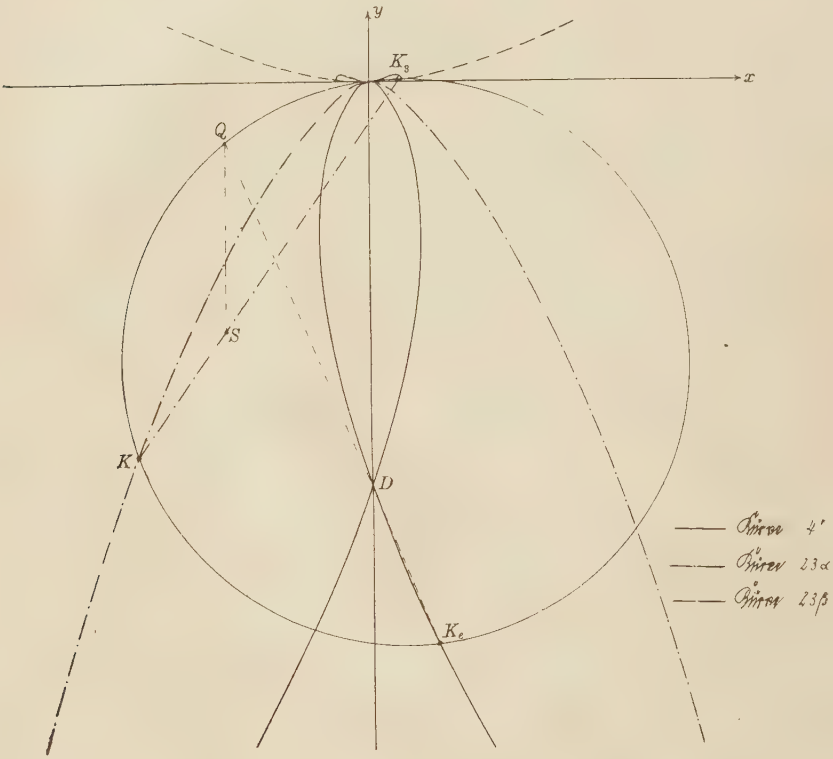


Fig. 13.

Die Diskriminantenkurve (4') und die transformierten Kurven (23α) und (23β) sind in Fig. 13 dargestellt: in einem Falle ist auch die Konstruktion von K und K_3 aus K_e angedeutet.

Teil II.

Die allgemeine zyklische Bewegung.

§ 7. Die Realitätsverhältnisse der Verwandtschaft; die Diskriminantenkurve.

Anknüpfend an § 1 wenden wir uns jetzt zur Betrachtung des allgemeinen Falles. Die Bezeichnungen, die in § 2 für die elliptische Bewegung festgesetzt worden sind, werden beibehalten. Nur soll jetzt der Durchmesser der Originalkreise, d. h. die Größe 2b, durch B ersetzt werden, und es soll ferner zur Abkürzung g^2 an die Stelle von $\frac{4}{3}wf$ treten.

Zuerst werden wir wieder die Realitätsverhältnisse der Verwandtschaft feststellen. Dazu bedienen wir uns auch hier der Kreiszuordnung, die am Schluß von § 1 entwickelt worden ist. Als „Original"kreise bezeichnen wir die Kreise des Büschels

$$x^2 + y^2 - By = 0;$$

danach berührt jeder Originalkreis die x-Achse im Koordinatenanfang Π und durchsetzt die y-Achse in einem Punkte $\mathfrak{B}$, der die Ordinate B hat. Das Büschel überdeckt die Ebene einfach, abgesehen vom Grunddoppelpunkte Π und den zwei imaginären Kreispunkten der Ebene, die allen Kreisen gemein sind.

Jedem Originalkreise entspricht ein Bildkreis mit der Gleichung (§ 1, X)

$$g^2 x_e^2 = (B - y_e)(g^2 y_e + B^3 + 2B^2 f). \qquad (24a)$$

Die y-Achse schneidet ersichtlich den Bildkreis in zwei Gegenpunkten, von denen einer der eben erwähnte Punkt $\mathfrak{B}$ $(0|B)$ ist, so daß sich also Bild und Original in $\mathfrak{B}$ berühren. Der zweite Schnittpunkt der y-Achse und des Bildkreises, d. h. der Gegenpunkt von $\mathfrak{B}$, heiße $\mathfrak{A}$; er hat die Ordinate

$$y_{\mathfrak{A}} = -\frac{B^2}{g^2}(B + 2f).$$

Wie im Falle der elliptischen Bewegung (vergl. § 2) verschaffen wir uns Klarheit über die Realitätsverhältnisse der

Verwandtschaft, indem wir die Überdeckung der Ebene durch die oben definierten Bildkreise studieren. Die Untersuchung, die hier anzustellen ist, wird naturgemäß viel komplizierter, als die entsprechende im vorausgenommenen Spezialfall, weil jetzt gleichzeitig ∞^1 Verwandtschaften diskutiert werden und also zwei wesentliche Konstanten g^2 und f auftreten.

Um die Betrachtungen später nicht unterbrechen zu müssen, schicken wir einige Bemerkungen voraus.

1. Wenn $y_{\mathfrak{A}} = 0$ ist, so fällt $\mathfrak{A}$ in den Koordinatenanfang Π; dann decken sich Bild- und Originalkreis, ja noch mehr: Jedem Punkte des Bildkreises entspricht auch gerade der ihn deckende Punkt des Originalkreises. Es zeigt dies die in § 2 abgeleitete Konstruktion eines Bildpunktes aus dem zugehörigen Originalpunkte, eine Konstruktion, die auf den Gleichungen (VIII) und (IX) in § 1 basiert und also ebenso für den allgemeinen Fall zyklischer Bewegung gültig bleibt. Da nun $y_{\mathfrak{A}}$, von dem trivialen Falle abgesehen, daß B verschwindet, nur dann zu Null wird, wenn

$$B = -2f$$

ist, so ist der Satz bewiesen: Es gibt für jede der betrachteten Verwandtschaften einen Kreis, dessen Punkte sich sämtlich selbst entsprechen; er berührt die x-Achse im Ursprung Π und hat den Punkt $(0|-f)$ als Mittelpunkt. Dieser Satz ist unzutreffend für die elliptische Bewegung, wie man dem früher besprochenen leicht entnimmt; wir werden an einer späteren Stelle den inneren Grund für diese Ausnahmestellung aufweisen.

2. Besonders wichtig für das Folgende ist es festzustellen, wann die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ koinzidieren. In diesem Falle zieht sich der Bildkreis in einen Nullkreis zusammen. Der so entstehende Punkt des Systemes K_e ist dann ein Fundamentalpunkt der Verwandtschaft, da ihm immer noch ein Originalkreis, d. h. eine ganze Kurve von Originalpunkten zugeordnet ist. Wie man nun durch Vergleichen der Ordinaten

findet, fallen die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zusammen, falls B der kubischen Gleichung genügt:

$$B = -\frac{B^2(B+2f)}{g^2}.$$

Ist zuerst

$$B = 0,$$

so ist der zugehörende Originalkreis identisch mit dem Koordinatenanfang Π, also ein einzelner Punkt. Von diesem Falle, der demnach interesselos ist, abgesehen folgt weiter:

$$B_{1,2} = -f \pm \sqrt{f^2 - g^2}.$$

Drückt man hier f und g^2 durch die Radien R und r aus, so findet man:

$$f^2 - g^2 = \frac{9R^2r^2}{4(R+2r)^2} - \frac{Rr}{R+r}\cdot\frac{Rr}{R+2r} - \frac{R^2r^2}{4(R+2r)^2}\cdot\frac{5R+r}{R+r}.$$

Die Wurzeln B_1 und B_2 und damit die zwei Koinzidenzen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ sind hiernach immer reell, außer wenn r negativ ist und gleichzeitig

$$R < |r| < 5R$$

ist. Die beiden Punkte $(0|B_1)$ und $(0|B_2)$, die sich auf diese Weise ergeben haben, werden wir fortan mit F_1 und F_2 bezeichnen, sodaß also

F_1 gegeben ist durch die Koordinaten $0|-f+\sqrt{f^2-g^2}$,

F_2 gegeben ist durch die Koordinaten $0|-f-\sqrt{f^2-g^2}$.

3. Endlich müssen wir noch zur genauen Erörterung der Verhältnisse die Einhüllende der Bildkreisschar in Betracht ziehen. Wir setzen zu diesem Zwecke die Gleichung eines jeden Bildkreises in die Form:

$$x_e^2 = -(y_e - y_{\mathfrak{A}})(y_e - y_{\mathfrak{B}}), \qquad (24\beta)$$

unter $y_{\mathfrak{A}}$ und $y_{\mathfrak{B}}$ die Ordinaten der oben eingeführten Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ verstehend. Die Hüllende der Kreisschar wird gefunden, wenn die Gleichung (24α) partiell nach B abgeleitet und das Ergebnis mit (24α) kombiniert wird. Man findet als Ergebnis der Differentiation:

$$(y_e - y_{\mathfrak{A}}) - (y_e - y_{\mathfrak{B}})\frac{3B^2 + 4Bf}{g^2} = 0; \qquad (25)$$

die Gleichung (24β) erlaubt statt dessen auch zu schreiben:

$$x_e^2 = -(y_e - y_{\mathfrak{B}})^2 \frac{3B^2 + 4Bf}{g^2} \tag{26}$$

Endlich brauchen wir zur Diskussion noch den Differentialquotient $\frac{dy_e}{dx_e}$; aus (24β) folgt unter Beachtung von (25) die Relation:

$$\frac{dy_e}{dx_e} = \frac{2x_e}{y_{\mathfrak{A}} + y_{\mathfrak{B}} - 2y_e}. \tag{27}$$

Von besonderem Interesse ist es nun für unsere Untersuchung, die Natur der Schnittpunkte festzustellen, die von der Hüllenden und der y-Achse gebildet werden. Aus der Gleichung (26) folgt, daß $x_e = 0$ wird in den folgenden Fällen:

α) wenn B verschwindet; dann ist auch $y_{\mathfrak{A}} = y_{\mathfrak{B}} = y_e = 0$, d. h. die Hüllende geht durch den Koordinatenanfang H;

β) wenn B den Wert $-\frac{4}{3}f$ hat;

γ) wenn die Differenz $(y_e - y_{\mathfrak{B}})$ verschwindet; nach (25) wird dann gleichzeitig $(y_e - y_{\mathfrak{A}})$ zu Null, d. h. es ist dann $y_e = y_{\mathfrak{A}} = y_{\mathfrak{B}}$. Den Fall haben wir schon erledigt; denn die Gleichheit von $y_{\mathfrak{A}}$ und $y_{\mathfrak{B}}$ bedingt, daß der Bildkreis zu einem Punkte wird. Sonach geht die Hüllende durch die Punkte F_1 und F_2. Wir können noch mehr aussagen: F_1 und F_2 sind Doppelpunkte der Hüllenden. In der Tat tritt nach (27) der Differentialquotient in der Form $\frac{0}{0}$ auf.

Man muß jetzt genauer feststellen, welcher Art die Doppelpunkte F_1 und F_2 sind. Ist allgemein

$$F(x, y, B) = 0$$

die Gleichung einer Kurvenschar, so ist ein singulärer Punkt der Hüllenden eigentlicher Doppelpunkt, Spitze (ev. Selbstberührungspunkt) oder isolierter Punkt, jenachdem

$$F_{BB} \cdot \frac{\partial(F_x, F_y, F_B)}{\partial(x, y, B)} \gtreqless 0$$

ist, wie man leicht bestätigt. Trotzdem diese Vorzeichenuntersuchung für unsern speziellen Fall ziemlich einfach ist, schlagen wir einen etwas anderen Weg ein, der sich enger an die im folgenden zu führende Untersuchung anlehnt.

Erteilt man dem Parameter B einen bestimmten Wert, so stellt (24β) einen Kreis dar. Dieser liefert zur Hüllenden zwei, symmetrisch zur y_e-Achse liegende Punkte als Beitrag: aus Gleichung (25) ergibt sich nämlich die Ordinate y_e eindeutig und aus (26) dann die zwei, entgegengesetzt gleichen Abszissen x_e. Wir wollen kurz sagen, ein Kreis (24β) sei am Hüllprozeß beteiligt, wenn die zwei Punkte, die er mit der Hüllenden gemein hat, reell sind. Soll also ein Kreis am Hüllprozeß beteiligt sein, so muß der zugehörende Parameter B einen solchen Wert haben, daß die rechte Seite von (26) positiv wird, d. h. aber, daß der Ausdruck

$$\frac{B(B+\frac{4}{3}f)}{g^2} \leq 0$$

ist. Es lassen sich demnach für den Parameter B gewisse Intervalle angeben, innerhalb deren er liegen muß, wenn der zugehörende Kreis am Hüllprozeß teilnehmen soll. Zur wirklichen Feststellung der Intervalle sind naturgemäß Voraussetzungen über die Konstanten f und g^2 nötig, und wir unterscheiden deshalb vier Fälle:

1. g^2 und f sind beide positiv und $0<r<+\infty$,
2. g^2 und f sind beide positiv und $-\infty \leqq r<-R$,
3. g^2 ist negativ und f positiv; dann ist $-R<r<-\frac{R}{2}$.
4. g^2 ist positiv und f negativ; dann ist $-\frac{R}{2}<r<0$.

Andere Möglichkeiten sind ausgeschlossen, da wir von den Zwischenwerten $r=0$ und $R=-r$, sowie von dem sog. elliptischen Falle $R=-2r$ hier nicht Gebrauch machen wollen. Wie man leicht sieht, ist die Ungleichung (28) den vier Fällen gemäß erfüllt, falls der Parameter B in den folgenden Grenzen variiert:

1. $-\frac{4}{3}f \leqq B \leqq 0$,
2. $-\frac{4}{3}f \leqq B \leqq 0$,
3. $0 \leqq B \leqq \infty$ und $-\infty \leqq B \leqq -\frac{4}{3}f$.
4. $0 \leqq B \leqq -\frac{4}{3}f$.

Hiermit sind die in Betracht kommenden Intervalle festgestellt. Wir kehren zurück zur Untersuchung der singulären

Punkte F_1 und F_2. Diese Punkte entstehen dadurch, daß für zwei bestimmte Parameterwerte B_1 und B_2 der Kreis (24β) sich in einen Punkt zusammenzieht. Geschieht das für einen Wert B, der innerhalb der eben gefundenen Intervalle liegt, so nehmen die Nachbarkreise an der Hüllung teil, der betreffende Punkt F ist dann wirklicher Doppelpunkt, andernfalls ist er isolierter Punkt der Hüllenden. Es handelt sich also darum festzustellen, ob die zu den Punkten F_1 und F_2 gehörenden Parameterwerte

$$B_1 = -f + \sqrt{f^2 - g^2},$$
$$B_2 = -f - \sqrt{f^2 - g^2}$$

in die oben aufgestellten Intervalle fallen oder nicht. Dies ist in einigen der Fälle leicht zu entscheiden. Man findet nämlich

im 1. Falle ist $\quad -f < B_1 < 0$

im 2. Falle ist $\quad -f < B_1 < 0$

im 3. Falle ist $\quad 0 < B_1$ und $B_2 < -2f$

im 4. Falle ist $\quad 0 < B_2 < -f.$

Mit anderen Worten: F_1 ist eigentlicher Doppelpunkt im 1., 2. und 3. Falle, ebenso ist F_2 eigentlicher Doppelpunkt im 3. und 4. Falle.

Die Bestimmung der Natur von F_1 und F_2 in den noch ausstehenden Fällen erfordert eine genauere Vorzeichenunterscheidung. Wir werden nur für F_2 im 1. Falle hier die Rechnung durchführen. Es ist im 1. Falle:

$$\frac{w}{f} = \frac{Rr}{R+r} : \frac{3Rr}{R+2r} = \frac{1}{3} \cdot \frac{R+2r}{R+r} < \frac{2}{3};$$

demnach ist

$$g^2 = \frac{4}{3} wf - \frac{4}{3} f^2 \cdot \frac{w}{f} < \frac{8}{9} f^2,$$

oder also

$$\frac{1}{9} f^2 < f^2 - g^2,$$

d. h.

$$\frac{1}{3} f < \sqrt{f^2 - g^2}$$

und somit

$$B_2 = -f - \sqrt{f^2 - g^2} < -\frac{4}{3} f;$$

es liegt sonach B_2 außerhalb des im 1. Falle vorgeschriebenen Intervalles.

Führt man die analogen Untersuchungen in den übrigen Fällen durch, so kommt man zur folgenden Tabelle, in der die Art der Fundamentalpunkte F_1 und F_2 notiert ist:

1. F_1 ist eigentlicher Doppelpunkt, F_2 ist isoliert.

2. F_1 und F_2 sind eigentliche Doppelpunkte, solange $-\infty > r > -5R$; im Falle $r = -5R$ fallen F_1 und F_2 in einen Selbstberührungspunkt zusammen; auf den Fall $r = \infty$ kommen wir zurück.

3. F_1 und F_2 sind eigentliche Doppelpunkte.

4. F_1 ist isoliert, F_2 ist eigentlicher Doppelpunkt.

Hervorgehoben sei nur noch, daß die Bildkreise mit Parameterwerten $B = 0$ und $B = -\frac{4}{3}f$ die Grenzen bilden zwischen den Kreisen, die an der Hüllung teilhaben, und den daran unbeteiligten.

Wir beginnen jetzt mit dem eigentlichen Studium der Überdeckungen. Dazu erinnern wir daran, daß die Lage eines jeden Bildkreises bekannt ist, sobald seine beiden Gegenpunkte $\mathfrak{A}\ [0, -\frac{B^2}{y^2}(B+2f)]$ und $\mathfrak{B}\ [0, +B]$ auf der y-Achse bestimmt sind. Wir stellen also fest, wie sich die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit variierendem B auf der Ordinatenachse verschieben.

Zunächst betrachten wir die Verhältnisse im ersten der oben unterschiedenen Fälle. Es mag dazu erstlich der Parameter B vom Werte 0 an wachsen. Dann liegen also die Originalkreise in der Halbebene der positiven Ordinaten; sie überdecken in ihrer Gesamtheit diese Halbebene einmal einfach und lückenlos. Die zugehörende Bildkreisschar aber bedeckt bereits die ganze Ebene einmal einfach; denn der Punkt $\mathfrak{B}$ bewegt sich vom Koordinatenanfang aus monoton in der Richtung der wachsenden Ordinaten; der Punkt $\mathfrak{A}$ geht ebenfalls von H aus aber immer in entgegengesetzter Richtung ins Unendliche.

Sodann möge der Parameter B die Wertefolge 0 bis $-\infty$ stetig durchlaufen. Die Originalkreise erfüllen dann

gerade die untere Halbebene. Um die Lage der entsprechenden Bildkreise festzustellen, bemerken wir, daß jetzt der Punkt $\mathfrak{B}$ sich dauernd von II aus in negativer Richtung auf der y-Achse fortbewegt. In gleicher Richtung läuft zunächst auch $\mathfrak{A}$. Nun ist für genügend kleine Werte von B

$$\frac{B^2}{g^2}(B+2f) < B,$$

d. h. zuerst eilt der Punkt $\mathfrak{B}$ dem Punkte $\mathfrak{A}$ voran, bis B den Wert $f+\sqrt{f^2-g^2}$ erreicht hat. In diesem Moment hat $\mathfrak{A}$ den Punkt $\mathfrak{B}$ eingeholt. Deuten wir jetzt das Gesagte an den Bildkreisen, so finden wir: Vom Nullkreis II an wachsen die Bildkreise zunächst, werden dann wieder kleiner und ziehen sich in F_1 in einen Punkt zusammen. Auf einander folgende Bildkreise schneiden sich, weil $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Bewegungsrichtung haben; jetzt besitzen also die Bildkreise eine Hüllende. Im Innern des bisher gebildeten Konturs liegt jeder Punkt auf zwei Bildkreisen; es wird nämlich jede Kreisperipherie durch die Berührungspunkte mit der Hüllenden in zwei Bögen geteilt, in einen oberen und einen unteren, und jeder Punkt des Innenraumes kommt einmal auf einen oberen und einmal auf einen unteren Bogen zu liegen.

Überschreitet weiterhin der Parameter B, natürlich immer in negativer Richtung, den Wert $-f+\sqrt{f^2-g^2}$, so liegt $\mathfrak{B}$ zwischen $\mathfrak{A}$ und II. Aber man sieht leicht, daß die Ordinate von $\mathfrak{B}$ nicht dauernd abnimmt. Vielmehr erreicht sie ihren kleinsten Betrag, nämlich $-\frac{32}{27}\frac{f^3}{g^2}$, falls B den Wert $-\frac{4}{3}f$ angenommen hat. Nimmt B weiterhin ab, so kehrt demnach $\mathfrak{A}$ seine Bewegungsrichtung um. Die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ laufen dann auf einander zu und treffen sich im Punkte F_2 für den Wert $-f-\sqrt{f^2-g^2}$ des Parameters B. Bis zu dem Werte $-\frac{4}{3}f$ hin haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleiche Bewegungsrichtung; diese Bildkreisserie besitzt eine Hüllende. Aber von da ab liegt jeder Bildkreis im Innern seines Vorgängers, weil sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ entgegenbewegen; der Hüllprozeß bricht also, wie oben auch analytisch gezeigt, für den Parameterwert $-\frac{4}{3}f$ ab.

Wieder gehen auch im Innern dieses Teiles der Hüllenden durch jeden Punkt zwei Kreise. Die Kreise zwar, die am Hüllprozeß beteiligt sind, überdecken das Innere noch nicht überall zweifach, die Fläche des zum Parameterwert $-\frac{4}{3}f$ gehörenden Bildkreises ist nämlich nur einfach bedeckt; aber diese letzte Lücke füllen die Kreise aus, die nun folgen bis zum letzten Nullkreise F_2 hin.

Nimmt endlich B noch algebraisch kleinere Werte an, so trennen sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wieder, $\mathfrak{B}$ läuft nach $-\infty$, $\mathfrak{A}$ über 0 nach $+\infty$. Somit ergibt sich zuletzt noch eine Schar von Bildkreisen, die die ganze Ebene einfach überdeckt, denn jetzt schließt jeder Bildkreis seine Vorgänger in sich ein. — Fig. 14 zeigt ein Beispiel für diesen Fall; die erste und letzte Bildkreisschar ($B>0$ resp. $B<-f-\sqrt{f^2-g^2}$) sind nicht eingezeichnet, da sie leicht vorstellbar sind; die benutzten Parameterwerte sind als Glieder einer arithmetischen Reihe gewählt.

Mit denselben Schlüssen, wie im Falle der elliptischen Bewegung, beweist man auch hier den Satz: Einem Bildpunkte K_e entsprechen so viele reelle Originalpunkte, als Bildkreise durch ihn hindurchgehen. Da wir soeben diese Zahl für die Bildpunkte in den verschiedenen Ebenenteilen bestimmt haben, so können wir unsre Untersuchung über den 1. Fall mit dem Satze beschließen:

Innerhalb der Hüllenden entsprechen einem Bildpunkte 4 reelle Originale,
auf der Hüllenden drei,
im Außenraum zwei.

Wir wenden uns jetzt der Diskussion des zweiten Falles ($-\infty \leqq r < -R$) zu und nehmen den Grenzfall, in dem r unendlich groß wird, voraus. Hier bleibt alles, wie vorhin; nur wird, wie man leicht nachrechnet,

$$-\tfrac{4}{3}f = -f-\sqrt{f^2-g^2},$$

d. h. der Punkt F_2 entsteht in demselben Momente, in dem der Hüllprozeß abbricht. Dieser spezielle Fall ist einfacher

als der früher betrachtete allgemeine, da jetzt die Kreise, die an der Hüllung teilnehmen, auch gerade das Innere der

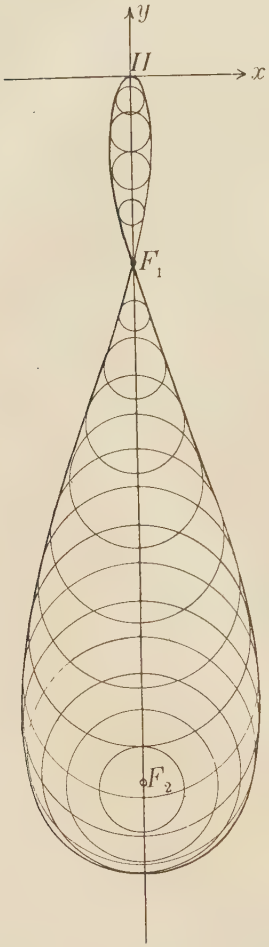


Fig. 14.

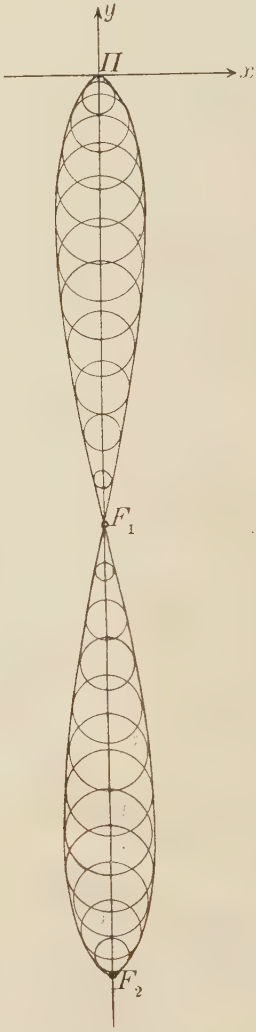


Fig. 15.

Hüllenden doppelt bedecken. Der Punkt F_2 kommt offenbar auf die Hüllende selbst zu liegen und stellt ihren tiefsten

Punkt dar. Fig. 15 zeigt die Schar der Bildkreise, soweit sie am Hüllprozeß beteiligt sind, sowie ihre Einhüllende.

In dem allgemeinen Beispiel des zweiten Falles entspricht, genau wie oben, den Originalkreisen der oberen Halbebene eine Bildkreisschar, die die ganze Ebene einmal überdeckt. Ist aber $B<0$, so unterscheiden wir noch zwei Unterfälle, nämlich $\alpha)\ -\infty<r\leqq -5R$ und $\beta)\ -5R<r<-R$.

Wenn im Falle $\alpha)$ der Parameter B von 0 an abnimmt, so laufen die Punkte $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ beide in negativer Richtung von Π aus und zwar $\mathfrak{B}$ zunächst rascher als $\mathfrak{A}$; in F_1 aber wird $\mathfrak{B}$ vom Punkte $\mathfrak{A}$ eingeholt. Von da ab eilt $\mathfrak{A}$ voraus bis zum Punkte F_2, wo $\mathfrak{B}$ den Punkt $\mathfrak{A}$ wieder überholt. $\mathfrak{A}$ bewegt sich danach noch ein Stück in derselben Richtung wie $\mathfrak{B}$, kehrt aber, sobald der Parameter B den Wert $-\frac{4}{3}f$ erreicht hat, um und begibt sich über Π in den positiven Teil der y-Achse, den er monoton durchläuft. Was bedeutet dies für die zugehörenden Bildkreise? Aus Π heraus wächst zuerst der Bildkreis, nimmt dann ab, bis er in F_1 zum ersten Male in einen Punkt zusammenschrumpft, wächst wieder an, wird aber bald wieder kleiner, um sich in F_2 zum zweiten Male in einen Punkt zusammenzuziehen. Von da ab wächst der Bildkreis dauernd. Da sich bis zum Parameterwert $-\frac{4}{3}f$ $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gleichsinnig bewegen, so wird die zugehörende Bildkreisschar von einer Hüllenden eingeschlossen, deren Gebiet sie gerade zweimal bedeckt. Da ferner beim Abbrechen des Hüllprozesses der Punkt $\mathfrak{B}$ vorausläuft, so muß der letzte Kreis, der noch an der Hüllung teil hat, schon ganz außerhalb des eingehüllten Gebietes liegen. Seine Vorgänger, von einem gewissen Kreise an, werden demnach die Hüllende schon durchsetzen, so daß je ein Stück im Innengebiete und im Außenraume liegt. Die herausragenden Kreisbogen überdecken in ihrer Gesamtheit genau einmal das Innere des letzten Kreises, der am Hüllprozeß noch beteiligt ist. Vom Parameterwerte $-\frac{4}{3}f$ ab entsteht auch hier wieder eine Bildkreisschar, in der jeder Kreis seine Vorgänger einschließt; so kommt auch hier eine nochmalige

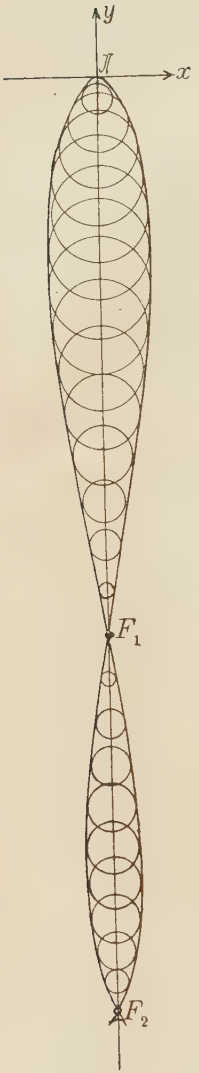


Fig. 16.

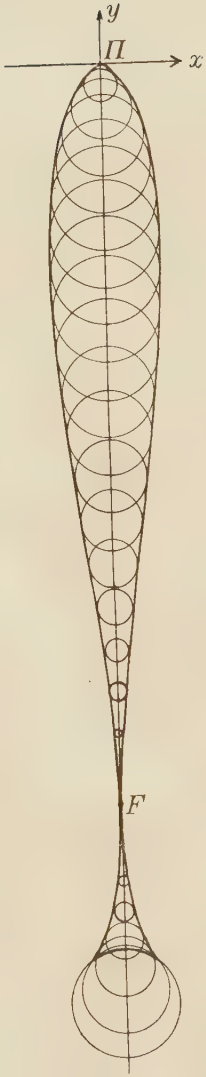


Fig. 17.

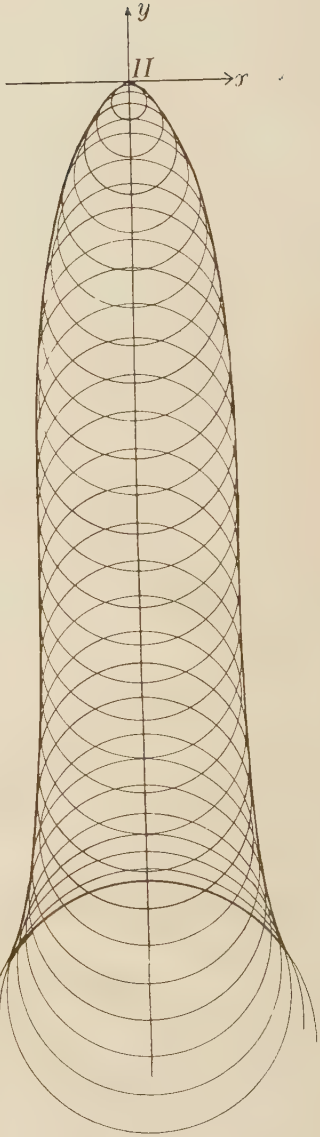


Fig. 18.

einfache Überdeckung der Ebene zustande. Fig. 16 gibt ein Beispiel für diesen Fall: auch hier sind nur Bildkreise eingetragen, die an der Hüllung teilnehmen.

Im Zwischenfalle $r = -5R$ fallen die Doppelpunkte F_1 und F_2 der Hüllenden in einen Selbstberührungspunkt zusammen, d. h. der Punkt $\mathfrak{A}$ holt den Punkt $\mathfrak{B}$ zwar einmal ein, überholt ihn aber nicht. Vergl. hierzu Fig. 17.

Im Falle β endlich eilt $\mathfrak{B}$ dem Punkte $\mathfrak{A}$ dauernd voraus, solange überhaupt beide Punkte gleichsinnig laufen. Der Bildkreis kann sich hier niemals in einen Punkt zusammenziehen. Fig. 18 stellt hierfür ein Beispiel dar.

Die beiden letzten Figuren unterscheiden sich dadurch etwas von den früheren, daß die Hüllende Spitzen aufweist. Eine einfache geometrische Betrachtung lehrt, daß dies dann immer der Fall ist, wenn der Hüllprozeß in einem Momente zu Ende geht, wo $\mathfrak{A}$ zwischen H und $\mathfrak{B}$ liegt. Da das Auftreten von Spitzen für uns keine weitere Bedeutung hat, so sei nur erwähnt, daß sich diejenigen Werte von B, für die der Bildkreis durch eine Spitze der Hüllenden geht, als Wurzeln der kubischen Gleichung finden:

$$B^3 + \tfrac{8}{3} f B^2 + (2f^2 - g^2) B - g^2 f = 0.$$

Es kommen wegen (26) nur Wurzeln B zwischen 0 und $-\frac{4}{3} f$ in Betracht, und es ist unschwer nachzuweisen, daß obige Gleichung für positives r keine Wurzel in diesem Gebiete hat, während sie für negatives r, soweit es noch unterhalb $-R$ liegt, eine passende Wurzel liefert.

Aus dem Besprochenen folgt, daß über die Realitätsverhältnisse in dem 2. Falle wörtlich dasselbe gilt wie im 1. Falle.

Wir wenden uns jetzt zur Betrachtung des vierten Falles, der sich den beiden schon behandelten Fällen enger anschließt als der dritte Fall. Es sei also im folgenden $-\frac{R}{2} < r < 0$, d. h. g^2 positiv, aber f negativ.

Mag hier zunächst B die Werte von 0 bis $-\infty$ durchlaufen; dann bewegen sich offenbar $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in entgegengesetzten Richtungen von H aus, nämlich $\mathfrak{A}$ in positivem,

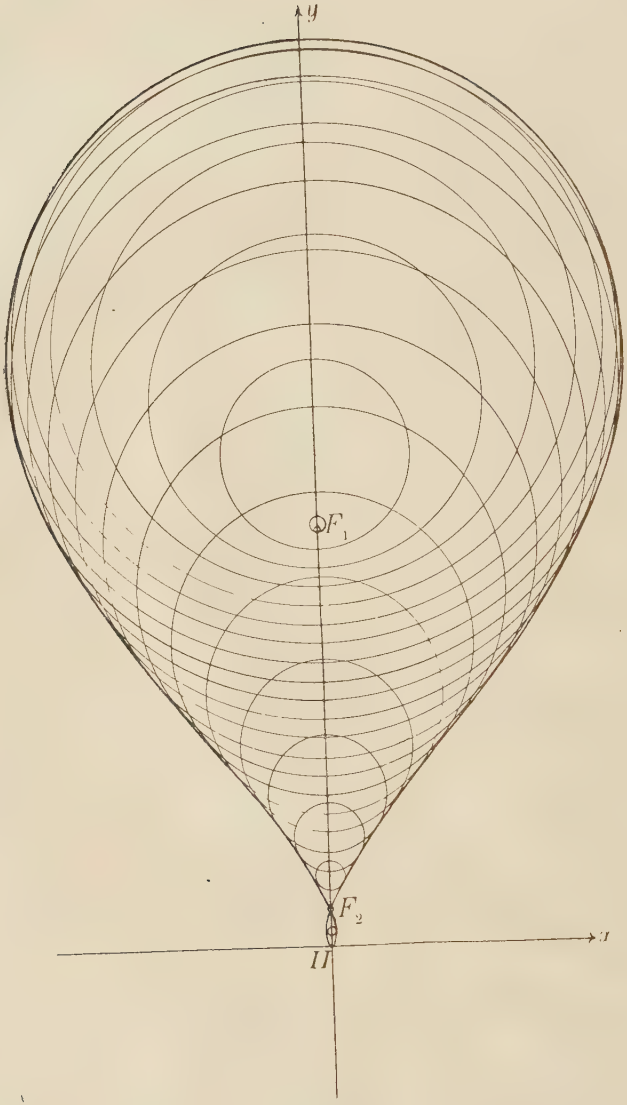


Fig. 19.

$\mathfrak{B}$ in negativem Sinne. Den Originalkreisen der unteren Halbebene entsprechen sonach Bildkreise, die in ihrer Gesamtheit die Ebene einmal überdecken. Wächst andererseits B von 0 an, so bewegen sich zuerst $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von Π aus in positiver Richtung, und zwar liegt im Anfang $\mathfrak{A}$ zwischen Π und $\mathfrak{B}$. Für den Parameterwert $-f-\sqrt{f^2-g^2}$ überholt $\mathfrak{A}$ den Punkt $\mathfrak{B}$ an der Stelle F_2. Nun eilt $\mathfrak{A}$ voran, bis B den Wert $-\frac{4}{3}f$ erreicht hat. Der Punkt $\mathfrak{A}$ kehrt um und bewegt sich auf den ihm entgegenkommenden Punkt $\mathfrak{B}$ zu. In F_1 treffen sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von neuem, um von da ab sich dauernd zu entfernen. Deuten wir das Gesagte an den Bildkreisen, so erkennen wir: Der Bildkreis wächst aus Π heraus, zieht sich einmal, nämlich in F_1, in einen Nullkreis zusammen und wächst dann wieder an. Der Hüllprozeß bricht ab. Die Bildkreise, die bis dahin zustande gekommen sind, werden von einer Hüllenden eingeschlossen, deren Innenraum indes noch nicht überall zweifach bedeckt ist. Dies ist vielmehr erst dann der Fall, wenn die Bildkreise, die nun bis zum zweiten Nullkreise F_1 noch folgen, hinzukommen — ganz ebenso, wie wir es im 1. Falle gefunden hatten. Zuletzt ergibt sich auch hier noch eine Bildkreisschar, die die Ebene einmal überdeckt. Die Realitätsverhältnisse können also in demselben Satze zusammengefaßt werden, wie im 1. Falle. Fig. 19 mag zur Erläuterung des Gesagten dienen.

Einen anderen Typus der Überdeckung führt nun der noch ausstehende dritte Fall herbei. Hier ist $-R<r<-\frac{R}{2}$, also g^2 negativ und f positiv.

Der Parameter B sei zuerst positiv, von 0 an wachsend. Dann durchläuft also $\mathfrak{B}$ monoton von Π aus die positive Hälfte der y-Achse. $\mathfrak{A}$ bewegt sich in gleichem Sinne, ist zuerst hinter $\mathfrak{B}$ zurück, holt es aber in F_1 für den Parameterwert $-f+\sqrt{f^2-g^2}$ ein. Von da an eilt $\mathfrak{A}$ dauernd voraus. Dieser Teil der Bildkreisschar hat, weil sich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ dauernd gleichsinnig bewegen, eine Einhüllende, die in F_1 einen Doppelpunkt besitzt und sich ins Unendliche erstreckt. Der ganze Innenraum wird doppelt überdeckt.

Nun sei B negativ und nehme von 0 an ab. $\mathfrak{B}$ bewegt sich von Π aus entlang dem negativen Teil der y-Achse. $\mathfrak{A}$ läuft zunächst von Π aus in entgegengesetzter Richtung, kehrt aber um, sobald B den Wert $-\frac{4}{3}f$ erreicht hat. Von diesem Momente an laufen beide Punkte in gleichem Sinne. Für den Parameterwert $-f-\sqrt{f^2-g^2}$ erreicht $\mathfrak{A}$ den Punkt $\mathfrak{B}$ und eilt dann voraus. Bis zu dem Bildkreise, der zum Parameterwerte $-\frac{4}{3}f$ gehört, schließt jeder Kreis seinen Vorgänger ein, eine Hüllung kann dann nicht stattfinden. Aber mit dem erwähnten Wert von B setzt der Hüllprozeß ein. Auch hier ergibt sich offenbar eine Einhüllende, die sich ins Unendliche erstreckt und in F_2 einen Doppelpunkt besitzt. Ihr Innenraum wird von der Bildkreisschar, die zu negativem B gehört, wiederum doppelt überdeckt.

Hiernach läßt sich über die Mehrdeutigkeit des Entsprechens das Folgende sagen: Einem Punkte, der außerhalb der beiden Hüllenden liegt, entspricht kein reeller Originalpunkt. Liegt ein Punkt auf einem Zweige der Hüllenden, doch nicht gleichzeitig auf oder innerhalb des anderen Zweiges, so entspricht ihm ein Originalpunkt. Liegt ein Punkt im Innern eines Zweiges, aber nicht zugleich auf oder in dem anderen Zweig, so hat er zwei reelle Originale, ebenso gibt es zwei Originalpunkte zu den beiden Punkten, die gleichzeitig beiden Hüllenden angehören (eine Ausnahme bildet der Fall $r=-\frac{5}{6}R$, wo diese beiden Punkte in F_1 fallen), drei Originale ferner gehören den Punkten zu, die auf dem einen Zweig der Hüllenden liegen, aber zugleich im Innengebiet des anderen. In dem Ebenenteil endlich, der gleichzeitig zum Inneren beider Zweige gehört, existieren zu jedem Bildpunkte vier reelle Originale. — In Fig. 20 ist ein Beispiel für diesen Fall dargestellt.[1])

[1]) Man könnte die im § 7 diskutierten Fälle verschmelzen, wenn man die räumliche Anschauung heranzöge; es würde sich dann eine „Diskriminantenfläche“ ergeben in Analogie zu F. Kleins Untersuchungen in Dycks Katalog math. Modelle (München 1892).

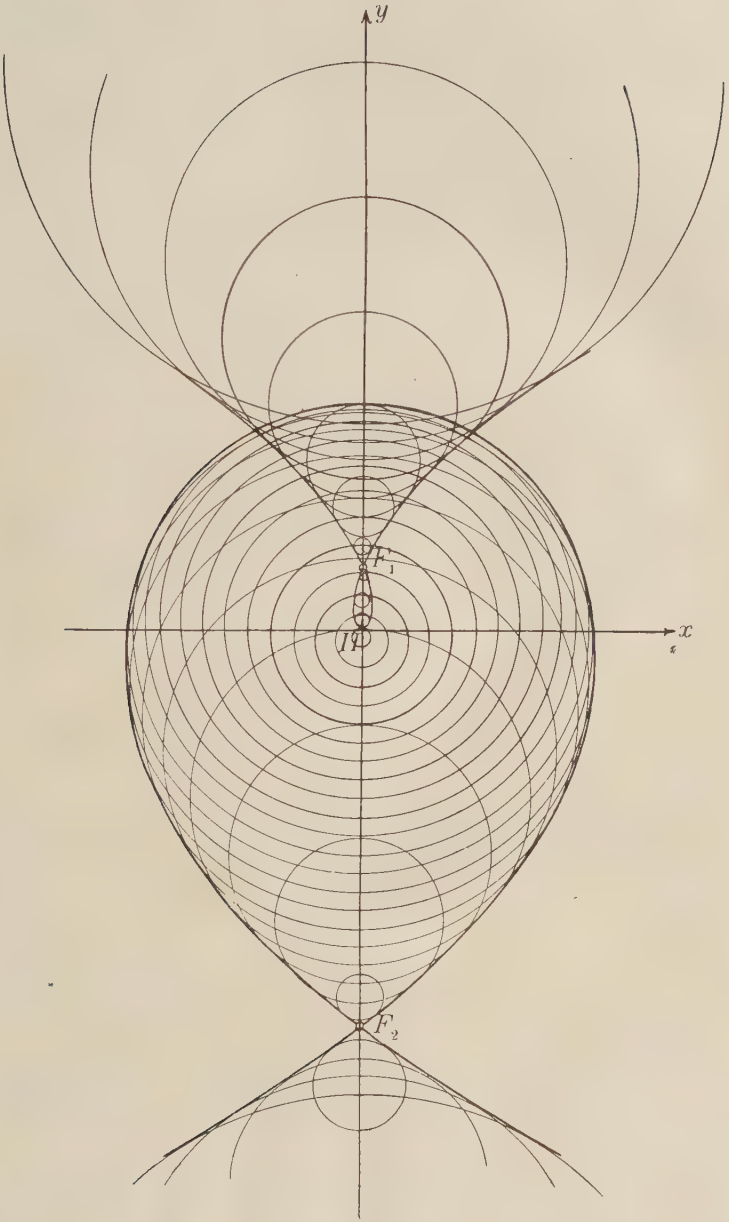


Fig. 20.

§ 8. Verwandtschaftsgleichungen; Fundamental- und Koinzidenzpunkte; Gleichung des durch je vier Bildpunkte bestimmten Kegelschnittbüschels; Resolventenverwandtschaft.

An die Untersuchung der Realitätsverhältnisse knüpfen wir nun einige Fragestellungen, die denen im elliptischen Falle entsprechen. Freilich werden manche Ergebnisse eine kompliziertere Gestalt aufweisen, sodaß nicht alle Probleme soweit konstruktiv verfolgt werden können, wie bei der vorausgenommenen speziellen Verwandtschaft. Das Studium der Überdeckungen hat ja schon gezeigt, wie mannigfaltige Formen im allgemeinen Falle auftreten.

Die analytischen Erörterungen stützen wir diesmal auf die biquadratische Gleichung, die den Parameter B als algebraische Funktion der Koordinaten x_e und y_e gibt:

$$B^4 - B^3(y_e - 2f) - B^2 \cdot 2fy_e + Bg^2y_e - g^2p_e^2 = 0. \quad (24\gamma)$$

Diese Gleichung ist, wie man leicht nweist, irreduzibel in dem Rationalitätsbereich, der durch f und g^2 bestimmt wird.

Die Gleichungen (VIII) und (IX) in § 1 entnimmt man leicht die Relationen:

$$x = \frac{x_e(B^2 - By_e)}{p_e^2 + B^2 - 2By_e}; \quad (28\alpha)$$

$$y = \frac{x_e^2 B}{p_e^2 + B^2 - 2By_e}. \quad (28\beta)$$

Hierdurch sind die Koordinaten eines Punktes K als rationale Funktionen des Parameters B dargestellt. Daraus folgt, daß auch die Größen x und y je einer Gleichung vierten Grades genügen müssen, deren Koeffizienten rational von x_e und y_e abhängen. Die so erhaltenen Beziehungen sind als Umkehrungen der Gleichungen VII in § 1 aufzufassen. Man findet sie wohl am einfachsten dadurch, daß man aus (24γ) und (28α) resp. (28β) die Größe B eliminiert. Es ergibt sich:

$$P_e^2 \cdot Q_e^2 x^4 - (10fg^2x_ey_e + 4f^2x_ep_e^2 + 2fx_ey_ep_e^2 + 8g^2x_ey_e^2 - 4g^2x_ep_e^2 + 4g^4x_e)x^3 + g^2x_e^2(8fy_e + 6g^2 - 2x_e^2 + 3y_e^2)x^2 - g^2x_e^3(2fy_e + y_e^2 + 4g^2)x + g^4x_e^4 = 0. \quad (29\alpha)$$

$$P_e^2 Q_e^2 y^4 - [y_e Q_e^2 P_e^2 - 2x_e^2(fp_e^2 + 3fg^2 + 4g^2y_e)]y^3 - (2fx_e^4y_e + 2fx_e^2y_e^2 + 9g^2x_e^2y_e^2 + 8fg^2x_e^2y_e - 4g^2x_e^4)y^2 - 2g^2x_e^4(3y_e + f)y - g^2x_e^6 = 0. \quad (29\beta)$$

Hierbei ist zur Abkürzung

$P_e^2 Q_e^2$ für $p_e^4 + g^4 - 2p_e^2 g^2 + 4f^2 p_e^2 + 4f p_e^2 y_e + 4g^2 y_e^2 + 4f g^2 y_e$

gesetzt worden. Wie man leicht sieht, ist $P_e Q_e$ gerade das Produkt der Abstände, die irgend ein Punkt K_e von den beiden Fundamentalpunkten hat. Um dies nachzuweisen, ist zu beachten, daß F_1 und F_2 auf der Polnormale liegen, daß also ihre x-Koordinaten verschwinden, ferner daß ihre Ordinaten Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 + 2fy + g^2 = 0$$

sind, so daß z. B. $y_1 + y_2$ durch $-2f$ und $y_1 \cdot y_2$ durch g^2 ersetzt werden darf. Bildet man das Quadrat des oben definierten Produktes für irgend ein K_e, so folgt:

$$[x_e^2 + (y_e - y_1)^2] \cdot [x_e^2 + (y_e - y_2)^2] = (p_e^2 - 2y_e y_1 + y_1^2)(p_e^2 - 2y_e y_2 + y_2^2) =$$
$$= p_e^4 - 2y_e p_e^2 (y_1 + y_2) + 4y_e^2 y_1 y_2 + p_e^2 (y_1^2 + y_2^2) - 2y_e y_1 y_2 (y_1 + y_2) + (y_1 y_2)^2.$$

Entfernt man hieraus noch die symmetrischen Funktionen von y_1 und y_2, dann erhält man den Ausdruck, der oben durch $P_e^2 Q_e^2$ bezeichnet worden ist. — Eine einfache Umformung zeigt, daß man auch das Produkt $P_e^2 Q_e^2$ in die Form

$$4x_e^2 (y_e + f)^2 + (\{y_e^2 + 2fy_e + g^2\} - x_e^2)^2$$

setzen kann. Es ist jetzt leicht zu übersehen, in welchen Fällen $P_e^2 Q_e^2$ verschwindet, d. h. wann einem Punkte K_e ein oder mehrere uuendlich ferne Punkte K entsprechen, nämlich

1. wenn x_e^2 verschwindet und gleichzeitig der Ausdruck $\{y_e^2 + 2fy_e + g^2\}$; durch diese zwei Angaben werden indessen die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2 gegeben; dieser Fall scheidet aus;

2. wenn der Inhalt der zweiten Klammer und der Ausdruck $\{y_e + f\}$ zu Null wird oder also wenn

$$x_e^2 = g^2 - f^2 \quad \text{und} \quad y_e = -f$$

ist. Damit sind zwei Punkte G_1 und G_2 definiert, die symmetrisch zur Polnormale liegen; sie fallen bei der speziellen Bewegung, für die $g^2 = f^2$ ist, zusammen und zugleich in den doppelt zählenden Fundamentalpunkt F, der ja hier an Stelle von F_1 und F_2 getreten ist. — Eine

einfache Rehnung zeigt weiter, daß in den Punkten G_1 und G_2 auch noch die Koeffizienten der dritten Potenzen von x und y in (29α) und (29β) verschwinden; ja in dem Spezialfall $3f^2 = 4g^2$ werden sogar die Koeffizienten von x^2 und y^2 zu Null. Wir finden also:

Es gibt zwei (reelle, zusammenfassende oder imaginäre) Punkte G_1 und G_2, denen je zwei (ev. drei) unendlich ferne Punkte K zugehören.

Die Koordinaten der beiden im Endlichen gelegenen Punkte K, die noch zu G_1 resp. G_2 gehören, genügen den quadratischen Gleichungen:

$$x^2(4g^2 - 3f^2) - x_e x(4g^2 - f^2) + g^2 x_e^2 = 0$$
$$y^2(4g^2 - 3f^2) + 4f x_e^2 y - x_e^4 = 0,$$

wo x_e durch $+\sqrt{g^2 - f^2}$ oder $-\sqrt{g^2 - f^2}$ ersetzt werden muß, je nachdem G_1 oder G_2 in Frage kommt. Beachtet man noch, daß immer die vier, einem Punkte K_e entsprechenden Punkte K auf dem Kreise über IIK_e liegen, daß also stets

$$x^2 + y^2 = x_e x + y_e y$$

ist; so kann man aus den obigen quadratischen Gleichungen noch die Relation herleiten.

$$y \cdot f = x_e(x_e - 2x).$$

Hiernach können zu G die zwei zugehörenden Punkte K_1 und K_2 so konstruiert werden: Ist G_x die x-Projektion von G, so halbiere man IIG_x in H und ziehe in G_x an den Kreis über IIG die Tangente, die die y-Achse in T treffen möge. Die Gerade TH schneidet den Kreis in K_1 und K_2 (Fig. 21).

Sehen wir im folgenden von den Punkten G_1 und G_2 ab, so erkennen wir aus den Gleichungen (29α) und (29β), daß einem Wertepaare x_e, y_e immer vier endliche, bestimmte Werte x und y entsprechen — ausgenommen allein, wenn gleichzeitig $P_e^2 Q_e^2$ und x_e verschwinden, d. h. nur die beiden Punkte F_1 und F_2 sind Fundamentalpunkte des Systems K_e.

Um die gleiche Frage für das System K zu entscheiden, bemerken wir vorweg, daß aus (29α) resp. (29β) für $x_e = 0$ folgt:

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0; \quad y_1 = y_e; \quad y_2 = y_3 = y_4 = 0.$$

Einem Punkte K_e der Polnormale entspricht also erstens der ihn deckende Punkt K, zweitens aber dreifach zählend der Pol Π. Da ferner aus den Gleichungen VII (§ 1) zu ersehen ist, daß nur für $x = y = 0$ die Größen x_e und y_e unbestimmt

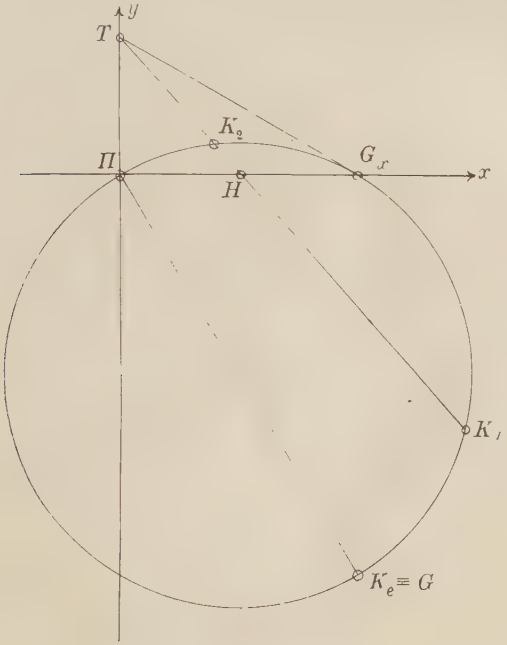


Fig. 21.

bleiben, so gilt der Satz: Im System der Punkte K ist allein Π Fundamentalpunkt; ihm entspricht dreifach zählend die Polnormale.

Wir haben endlich bereits hervorgehoben, daß die Punkte der Polnormale sowie die Punkte des Kreises

$$x^2 + y^2 + 2fy = 0$$

sich selbst entsprechen. Beschränken wir uns auf reelle Punkte, so finden wir mittels der Gleichungen VII (§ 1) leicht

das Ergebnis: Nur die Punkte der Polnormale und des oben erwähnten Kreises sind sich selbst entsprechend.

Wie schon einmal bemerkt, erleidet dieser Satz eine Ausnahme im Falle der elliptischen Bewegung; denn es wird dann f unendlich groß, also der sonst auftretende Kreis zur Poltangente: die Punkte der Poltangente aber sind im elliptischen Fall nicht selbstentsprechend (vergl. § 3, Schluß). Um diesen Widerspruch aufzuklären, dividieren wir die Gleichungen (29α) und (29β) durch f^2 und gehen dann zur Grenze für unendlich wachsendes f über. Das Resultat ist: Von (29α) spaltet sich der Faktor $(x - x_e)$, von (29β) aber y, d. h. die allgemeine biquadratische Verwandtschaft löst sich im Spezialfalle in eine kubische und eine lineare auf, deren erstere allein oben betrachtet worden ist. Der obige Satz aber würde offenbar seine Gültigkeit behalten, wenn man die kubische und die lineare Verwandtschaft als zusammengehörend betrachten würde.

Die nächste Aufgabe ist es zu erörtern, wie zeichnerisch zu einem vorgegebenen Punkte K_e die zugehörenden vier Punkte K ermittelt werden können. Die gesuchten Punkte liegen erstens auf dem Kreise über ΠK_e (§ 1, VIIβ). Weiter aber ist klar, daß durch sie eine Kegelschnittbüschel gelegt werden kann, das also durch die Angabe von K_e bestimmt ist. Wenn es gelingt, außer dem Kreise über ΠK_e noch einen zweiten Kegelschnitt des Büschels anzugeben, dann ist nicht nur die Gleichung des Büschels bestimmt, sondern gleichzeitig auch unsere Konstruktionsaufgabe gelöst: Die vier Punkte K werden dann zeichnerisch als Schnittpunkte eines Kreises und eines anderen Kegelschnittes gefunden. Um uns noch einen Kegelschnitt zu verschaffen, der durch die vier Punkte K geht, machen wir mit unbestimmten Koeffizienten den Ansatz: $ax^2 + bxy + cy^2 + dy + e = 0.$

In dieser Gleichung drücken wir x und y durch den Parameter B aus: wir finden nach (28α und β):

$$a x_e^2 (B^4 - 2 B^3 y_e + B^2 y_e^2) + b x_e^3 (B^3 - B^2 y_e) + c x_e^4 B^2 +$$
$$+ d x_e^2 (B^3 - 2 B^2 y_e + B p_e^2) + e (B^2 - 2 B y_e + p_e^2)^2 = 0.$$

Wegen der Irreduzibilität von Gleichung (24γ) kann die eben geschriebene Relation nur bestehen, wenn die Koeffizienten der einzelnen Potenzen von B den entsprechenden Koeffizienten von (24γ) proportional sind. Es lassen sich demnach die Größen a, b, c, d und e bis auf einen Faktor bestimmen, und man findet als Gleichung des gesuchten Kegelschnittes:

$$x^2 x_e (p_e^2 + g^2) + xy (y_e \{p_e^2 + g^2\} + 2 f p_e^2) +$$
$$+ 2 y^2 x_e g^2 - 3 y g^2 x_e y_e - g^2 x_e^3 = 0.$$

Durch lineare Komposition mit dem Kreise VIIβ (§ 1) erhält man als Gleichung des Büschels:

$$x^2 \{p_e^2 x_e + \lambda\} + xy \{g^2 y_e + p_e^2 y_e + 2 f p_e^2\} + y^2 \{g^2 x_e + \lambda\} +$$
$$+ x \{x_e^2 g^2 - x_e \lambda\} + y \{-2 g^2 x_e y_e - y_e \lambda\} - g^2 x_e^3 = 0.$$

Zur zeichnerischen Bestimmung der vier Punkte K aus dem gegebenen K_e empfiehlt sich besonders die Hyperbel, die sich für $\lambda = -g^2 x_e$ ergibt. Eine allgemeine Diskussion des Büschels würde wegen der großen Zahl der Parameter sehr weitläufig werden.

Mit der Angabe eines Punktes K_e ist das oben aufgestellte Kegelschnittbüschel völlig bestimmt, also auch das Polardreieck, das allen Kurven des Büschels gemein ist. Danach sind einem Punkte K_e außer den vier Punkten K noch die drei Ecken P_1, P_2, P_3 des Polardreiecks zugewiesen. Man kann fragen, in welcher Beziehung die Verwandtschaft zwischen K_e und den vier Punkten K zu der Verwandtschaft zwischen K_e und den drei Punkten P steht.

Offenbar werden die drei Abszissen und die drei Ordinaten der Punkte P je einer kubischen Gleichung genügen, deren Koeffizienten rationale Funktionen von x_e und y_e sind. Wir behaupten: Jede dieser beiden kubischen Gleichungen ist eine Partialresolvente der biquadratischen Gleichung für B.

Zum Beweise denken wir die Koordinaten von K_1, K_2, K_3, K_4 je durch die betreffende Wurzel B der Gleichung (24γ) dargestellt, also x_1 und y_1 je als rationale Funktion von B_1 usf. Der Punkt P_1 (Fig. 22) bleibt ungeändert bei den folgenden Vertauschungen der Punkte K, also auch der entsprechenden Wurzeln B:

(1), (13), (24), (13)(24), (12)(34), (14)(23), (1234), (1432).

Auf die Koordinaten der Punkte P_2 und P_3 werden analog die Substitutionen der beiden konjugierten Gruppen angewendet werden dürfen, ohne daß sie ihre Werte ändern. Eine solche Funktion der Wurzeln B, die ihren Wert beibehält, wenn auf die Indizes die Permutationen obiger Gruppe (resp. einer mit ihr konjugierten) ausgeübt werden, genügt aber einer kubischen Gleichung, die als Partialresolvente von (24γ) bezeichnet wird. — Da ferner Abszisse und Ordinate eines jeden Punktes P zur selben Gruppe gehören, so sind sie rational durch einander darstellbar.

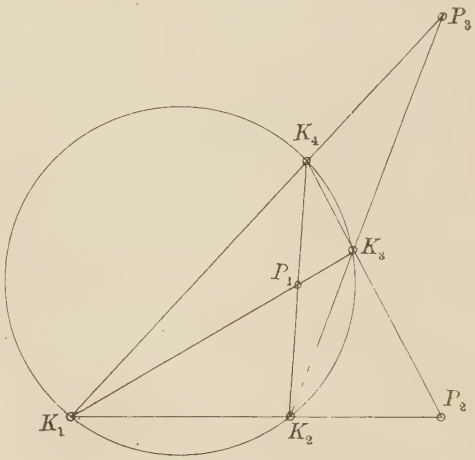


Fig. 22.

Ist ein Punkt K_ε gegeben und sind außerdem die drei zugehörenden Punkte P_1, P_2, P_3 bekannt — etwa durch die Angabe ihrer Abszissen —, so ist dies gleichbedeutend damit, daß eine Funktion der vier Größen B_1, B_2, B_3, B_4 gegeben ist, die zum größten gemeinschaftlichen Teiler der drei oben erwähnten Gruppen gehört, d. h. zur Gruppe

(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23).

Geometrisch ist dies ebenso evident: nur die eben aufgezählten Vertauschungen der Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 lassen

gleichzeitig alle drei Punkte P ungeändert. Algebraisch folgt aus dem Besprochenen: Durch Adjunktion der drei Abszissen $x_{P,1}$, $x_{P,2}$, $x_{P,3}$ von P_1, P_2, P_3 reduziert sich die Gruppe der biquadratischen Gleichung für B auf die vier oben angeführten Substitutionen, die Gleichung ist dann durch zwei Quadratwurzeln lösbar.

Damit ist gezeigt, welcher Vorteil mit der Kenntnis der drei Punkte P verknüpft ist: Die Verwandtschaft zwischen K_e und den Punkten P ist eine Art „Resolventenverwandtschaft" zur ursprünglichen biquadratischen.

Im vorliegenden Falle erweist sich die Resolventenverwandtschaft nicht als besonders einfach. Um das Besprochene rechnerisch zu verfolgen, drücken wir die Koordinaten von P_1 zuerst durch die Koordinaten der Punkte K aus und finden:

$$x_{P,1} = \frac{(x_1 y_3 - y_1 x_3)(x_2 - x_4) - (x_2 y_4 - y_2 x_4)(x_1 - x_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)}$$

$$y_{P,1} = -\frac{(x_1 y_3 - x_3 y_1)(y_2 - y_4) - (x_2 y_4 - x_4 y_2)(y_1 - y_3)}{(x_1 - x_3)(y_2 - y_4) - (x_2 - x_4)(y_1 - y_3)}.$$

In diesen Formeln sind die Größen x und y durch B mittels (28α) und (28β) zu ersetzen. Es ergibt sich:

$$x_1 - x_3 = \frac{x_e}{N_1 \cdot N_3}(B_1 - B_3)\{p_e^2(B_1 + B_3 - y_e) - B_1 B_3 y_e\}$$

$$y_1 - y_3 = \frac{x_e^2}{N_1 N_3}(B_1 - B_3)\{p_e^2 - B_1 B_3\},$$

wo zur Abkürzung

$$N_i = p_e^2 + B_i^2 - 2 B_i y_e \quad (i = 1, 3)$$

gesetzt ist. Weiter erhält man:

$$x_1 y_3 - x_3 y_1 = \frac{x_e^3 B_1 B_3}{N_1 N_3}(B_1 - B_3).$$

Mit diesen Werten findet man schließlich:

$$x_{P,1} = \frac{x_e\{B_1 B_3(B_2 + B_4) - B_2 B_4(B_1 + B_3) - y_e(B_1 B_3 - B_2 B_4)\}}{p_e^2(B_1 + B_3 - B_2 - B_4) - 2 y_e(B_1 B_3 - B_2 B_4) - [B_2 B_4(B_1 + B_3) - B_1 B_3(B_2 + B_4)]} \quad (30\alpha)$$

$$y_{P,1} = \frac{x_e^2(B_1 B_3 - B_2 B_4)}{p_e^2(B_1 + B_3 - B_2 - B_4) - 2 y_e(B_1 B_3 - B_2 B_4) - [B_2 B_4(B_1 + B_3) - B_1 B_3(B_2 + B_4)]}. \quad (30\beta)$$

Um nun direkt nachzuweisen, daß $x_{P,1}$ und $y_{P,1}$ Wurzeln einer kubischen Resolvente von (24γ) sind, gehen wir von derjenigen Gleichung dritten Grades aus, der die Größe

$$k = B_1 B_3 + B_2 B_4$$

genügt[1]); das ist die Gleichung:

$$k^3 + 2fy_e k^2 + (2fg^2 y_e - g^2 y_e^2 + 4g^2 p_e^2)k + \\ + [8fg^2 y_e p_e^2 + (y_e - 2f)^2 g^2 p_e^2 - g^4 y_e^2) = 0.$$

Hier haben wir eine Resolvente von (24γ) vor uns; es ist also nur noch zu zeigen, daß $x_{P,1}$ und $y_{P,1}$ rational durch k darstellbar sind, daß also die kubischen Gleichungen für $x_{P,1}$ und $y_{P,1}$ durch Tschirnhausen-Transformation aus der Gleichung für k hervorgehen. Es werden aber Zähler und Nenner in (30α) und (30β) rationale Funktionen von k, wenn man sie zuvor mit $(B_1 B_3 - B_2 B_4)$ multipliziert; man findet dann leicht als die gewünschten Darstellungen:

$$x_{P,1} = \frac{x_e \{k^2 y_e + k g^2 y_e + 2 g^2 p_e^2 (y_e + 2f)\}}{k^2 \cdot 2 y_e + k(2 f p_e^2 + g^2 y_e - y_e p_e^2) + 4 g^2 p_e^2 (y_e + f)} \qquad (30\gamma)$$

$$y_{P,1} = \frac{-x_e^2 \{k^2 + 4 g^2 p_e^2\}}{k^2 \cdot 2 y_e + k(2 f p_e^2 + g^2 y_e - y_e p_e^2) + 4 g^2 p_e^2 (y_e + f)}. \qquad (30\delta)$$

Damit sind die vorausgehenden Aussagen auch rechnerisch verifiziert. Man würde jetzt, analog wie es bei der kubischen Verwandtschaft geschehen ist, Untersuchungen über die Gestalt des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ bei variablem K_e anstellen können. Es mögen indes wegen der Kompliziertheit der Zuordnung die folgenden Betrachtungen genügen. Durch die drei Punkte P kann eine zweiparametrige Schar von Kegelschnitten gelegt werden, die in jedem Falle durch die Angabe von K_e völlig bestimmt ist. Wir wollen angeben, wie etwa drei linear unabhängige Kegelschnitte des Netzes gefunden werden können.

Eliminiert man aus (30γ) und (30δ) den Parameter k, so erweist sich das Eliminationsresultat als quadratisch in

[1]) S. z. B. Webers Algebra, Bd. 1 (1898), § 168 (20).

$x_{P,1}$ und $y_{P,1}$, und wir haben einen Kegelschnitt des Netzes gefunden; er hat die Gleichung:

$$x^2 \cdot 2x_e^2(g^2+p_e^2)+xy \cdot x_e(2fp_e^2-3g^2y_e+3p_e^2y_e)+$$
$$+y^2 \cdot y_e(g^2y_e+p_e^2y_e+2fp_e^2)-x \cdot 4g^2x_e^3+y \cdot 3g^2x_e^2y_e+2g^2x_e^4=0.$$

Bildet man zweitens aus (30γ) und (30δ) zunächst die Relation

$$x_e\left(\frac{x_{P,1}}{y_{P,1}}+\frac{y_e}{x_e}\right)=\frac{2g^2p_e^2(y_e-2f)-kg^2y_e}{k^2+4g^2p_e^2},$$

so kann man hieraus und aus der kubischen Gleichung für k wieder k entfernen; es findet sich ebenfalls ein Kegelschnitt. Durch eine einfache Kombination mit dem schon gefundenen ergibt sich der zweite Kegelschnitt, den wir anführen:

$$x^2 \cdot 2x_e^2[p_e^4(y_e-2f)^2+g^2y_e^2p_e^2]-xy \cdot x_e(8fg^2p_e^2p_e^4+16g^2p_e^2y_e-$$
$$-3g^2p_e^2y_e^3-16fg^2p_e^4+6fg^2p_e^2y_e^2-4p_e^4y_e^3-g^4y_e^3)-$$
$$-y^2(16fg^2p_e^4y_e-10fg^2p_e^2y_e^3+g^4y_e^4+8f^2p_e^4y_e^2-2p_e^4y_e^4-$$
$$-g^2p_e^2y_e^4)+y[8g^2x_e^2p_e^4(y_e-2f)+8fg^2x_e^2y_e^2p_e^2-g^4x_e^2y_e^3]=0.$$

Diese Gleichung ist insofern bemerkenswert, als ihr zwei Terme fehlen: das Absolutglied und das lineare Glied in x. Es wird im allgemeinen nur einen Kegelschnitt im Netz mit dieser Gleichungsform geben.

Um noch einen Kegelschnitt zu finden, der linear unabhängig ist von den zwei obigen, bemerken wir, daß sich die Gleichung eines Kreises nicht durch lineare Komposition aus den zwei angeführten Gleichungen herleiten läßt; man braucht nur den Spezialfall $y_e=0$ zu betrachten. Andererseits aber kann man sich in folgender Weise den Kreis durch die drei Punkte P verschaffen: Die Punkte P_1 und P_2 sind in bezug auf den Kreis über IIK_e harmonisch konjugiert; also ist

$$x_{P,1} \cdot x_{P,2}+y_{P,1} \cdot y_{P,2}=\tfrac{1}{2}x_e(x_{P,1}+x_{P,2})+\tfrac{1}{2}y_e(y_{P,1}+y_{P,2}). \quad (31\alpha)$$

Bildet man die entsprechenden Formeln für P_1 und P_3 resp. für P_2 und P_3, so ergibt die Summation:

$$\Sigma\{x_{P,1} \cdot x_{P,2}\}+\Sigma\{y_{P,1} \cdot y_{P,2}\}=x_e\Sigma x_{P,1}+y_e\Sigma y_{P,1}. \quad (31\beta)$$

Andererseits aber kann man die Beziehung (31α) in die Form setzen

$$\Sigma\{x_{P,2}\cdot x_{P,2}\}-x_{P,3}(x_{P,1}+x_{P,2})+\Sigma\{y_{P,1}\cdot y_{P,2}\}-y_{P,3}(y_{P,1}+y_{P,2})=$$
$$=\tfrac{1}{2}x_e\Sigma x_{P,1}-\tfrac{1}{2}x_e x_{P,3}+\tfrac{1}{2}y_e\Sigma y_{P,3}-\tfrac{1}{2}y_e y_{P,3}$$

oder statt dessen

$$\Sigma\{x_{P,1}\cdot x_{P,2}\}-x_{P,3}\Sigma x_{P,1}+x_{P,3}^2+\Sigma\{y_{P,1}\cdot y_{P,2}\}-y_{P,3}\Sigma y_{P,1}+y_{P,3}^2-$$
$$=\tfrac{1}{2}x_e\Sigma x_{P,1}-\tfrac{1}{2}x_e x_{P,3}+\tfrac{1}{2}y_e\Sigma y_{P,1}-\tfrac{1}{2}y_e y_{P,3}.$$

Hier treten außer $x_{P,3}$ und $y_{P,3}$ nur symmetrische Funktionen der drei Koordinatenpaare $(x_{P,i}, y_{P,i})$ auf. Der Index 3 an $x_{P,3}$ und $y_{P,3}$ kann weggelassen werden, da er willkürlich ist. Man findet unter Benutzung von (31β) die Beziehung

$$x_P^2+y_P^2+x_P(\tfrac{1}{2}x_e-\Sigma x_{P,1})+y_P(\tfrac{1}{2}y_e-\Sigma y_{P,1})+$$
$$+\tfrac{1}{2}x_e\Sigma x_{P,1}+\tfrac{1}{2}y_e\Sigma y_{P,1}=0.$$

Das ist aber die Gleichung eines Kreises durch die drei Punkte P. Die Koeffizienten enthalten nur noch die symmetrischen Funktionen $\Sigma x_{P,1}$ und $\Sigma y_{P,1}$; diese Größen lassen sich aus (30γ) und (30δ) unter Benutzung der kubischen Gleichung für k bilden, wenn auch die Rechnung sehr umfangreich ist. Damit ist eine dritte, linear von den zwei oben angeführten Kegelschnitten unabhängige Kurve zweiter Ordnung gefunden.

§ 9. Untersuchung solcher Fälle, in denen das einem Punkte K_e entsprechende Viereck $K_1K_2K_3K_4$ eine besondere Gestalt besitzt.

Wir kehren zur biquadratischen Verwandtschaft zurück und werden zuerst drei Beispiele dafür betrachten, daß das einem Punkte K_e entsprechende Viereck einer Bedingung unterworfen ist.

Zunächst soll das Quadrupel K_1, K_2, K_3, K_4 die Ecken eines Trapezes bilden und zwar eines gleichschenkligen, weil ja das Viereck stets ein Kreisviereck ist: es wird also die Forderung gestellt, daß ein Seitenpaar parallel sein soll. Dies aber bedingt, daß einer der drei Punkte P, die wir oben eingeführt hatten, in unendliche Ferne rückt: es muß

demnach in den Formeln (30α) und (30β) oder auch in (30γ) und (30δ) der Nenner verschwinden. Geht man von den Gleichungen (30γ) und (30δ) aus, so läuft die Bestimmung der gesuchten Fälle darauf hinaus: es ist aus der quadratischen Gleichung für k

$$k^2 \cdot 2y_e + k(2fp_e^2 + g^2 y_e - p_e^2 y_e) + (y_e + f)4g^2 p_e^2 = 0, \quad (30\varepsilon)$$

die sich durch Nullsetzen des Nenners von (30γ) ergibt, und aus der kubischen Gleichung, der k immer genügt, die Größe k zu eliminieren. Es ergibt sich auf diese Weise eine Relation zwischen x_e und y_e, nämlich die Gleichung derjenigen Kurven, deren Punkten Trapeze $K_1 K_2 K_3 K_4$ entsprechen. Geht man aber von den Formeln (30α) und (30β) aus, so muß sich der verlangte geometrische Ort ergeben, wenn man die Indizes im Nenner noch zweimal permutiert, dann aber das Produkt der drei so gefundenen Größen bildet und die symmetrischen Funktionen der Wurzeln B mittels (24γ) entfernt. Der zweite Weg ist vorzuziehen; er liefert offenbar ein Resultat von der Dimension 9, während das Resultat des ersten Verfahrens die Dimension 15 besitzt, wie man den allgemeinen Formeln für die Resultante einer quadratischen und einer kubischen Form sofort entnimmt. Es ist also nach Vollendung des ersten Weges noch eine Division nötig mit einem Ausdruck 6ter Dimension und zwar mit $\Pi(B_1 B_3 - B_2 B_4)$, wie man leicht sieht:

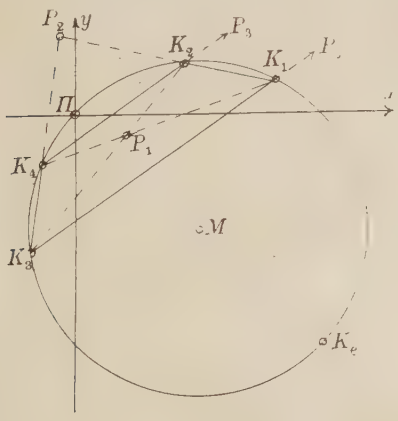


Fig. 23.

Führt man, den zweiten Weg einschlagend, das Produkt aus über die drei Permutationen des Nenners von (30α), so findet man zunächst folgende Gleichung:

$$p_e^6(\Sigma B_1^3 - \Sigma B_1^2 B_2 + 2\Sigma B_1 B_2 B_3) - 2y_e p_e^4(\Sigma B_1^3 B_2 - \Sigma B_1^2 B_2 B_3 - 2\Sigma B_1^2 B_2^2 +$$
$$+ 12 B_1 B_2 B_3 B_4) + 12 y_e p_e^2(\Sigma B_1^2 B_2^2 B_3^2 - B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1^2) + (p_e^2 + 4y_e^2)$$
$$\{p_e^2(3 B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1 + \Sigma B_1^3 B_2 B_3 - 2\Sigma B_1 B_2^2 B_3^2) + (2 B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1^2 B_2 -$$
$$- 3 B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1 B_2 B_3 - \Sigma B_1^3 B_2^2 B_3^2)\} - 8 y_e^3(B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1^2 -$$
$$- \Sigma B_1^2 B_2^2 B_3^2) - 2 y_e \{B_1 B_2 B_3 B_4 (2\Sigma B_1^2 B_2^2 + \Sigma B_1^2 B_2 B_3 - 12 B_1 B_2 B_3 B_4) -$$
$$- \Sigma B_1^2 B_2^3 B_3^3\} \quad [B_1 B_2 B_3 B_4 (2 B_1 B_2 B_3 B_4 \Sigma B_1 \quad \Sigma B_1 B_2^2 B_3^2) + \Sigma B_1^3 B_2^3 B_3^3] = 0.$$

Berechnet man hier die symmetrischen Funktionen aus den Koeffizienten von (24γ), so findet man als Gleichung derjenigen Kurve, deren Punkten Trapeze entsprechen:

$$T = 8 f^3 p_e^3 (2 y_e^2 - p_e^2) + 4 f^2 p_e^3 y_e (4 y_e^2 - p_e^2) + 2 f p_e^3 y_e^2 (2 y_e^2 + p_e^2) +$$
$$+ p_e^6 y_e^3 + g^6 y_e^3 + g^2 (g^2 + p_e^2)(4 y_e^3 + 16 y_e p_e^4 - 17 y_e^3 p_e^2) +$$
$$+ 4 f g^2 p_e^2 (4 p_e^4 + 3 p_e^2 y_e^2 - 4 y_e^4) - 4 f^2 g^2 p_e^2 y_e (4 y_e^2 - 7 p_e^2) +$$
$$+ 2 f g^4 (8 p_e^4 - 7 y_e^2 p_e^2 + 2 y_e^4) = 0.$$

Die eben gefundene Kurve, die wir im folgenden als T-Kurve zitieren werden, hat die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2 zu Doppelpunkten, wie man leicht nachrechnet. Zu anderen Doppelpunkten von ihr werden wir noch kommen. — Es ist nun zu erörtern, wie die vier Punkte K konstruiert werden können, falls K_e auf der T-Kurve liegt. Vor allem ist zu bemerken, daß in diesem Falle die Konstruktion mit Zirkel und Lineal ausführbar ist. Es gehört nämlich jetzt einer der Punkte P der Resolventenverwandtschaft dem Rationalitätsbereich von f und g^2 an; also reduziert sich die Gruppe der biquadratischen Gleichung für B (24γ) auf 8 Substitutionen; es sind dann noch 3 Quadratwurzeln zur völligen Lösung notwendig. Um dies auch rechnerisch evident zu machen, erwägen wir folgendes: Wie oben erwähnt, ist das Polynom T ein Faktor der Resultante aus der kubischen und der quadratischen Gleichung für k. Mit $T = 0$ verschwindet gleichzeitig die Resultante, und die zwei Gleichungen haben eine gemeinsame Wurzel, die rational durch x_e und y_e darstellbar ist. Also ist die Größe k, d. h.

$B_1B_3 + B_2B_4$, konstruierbar, gleichzeitig auch $x_1x_3 + x_2x_4$, das zur selben Gruppe gehört. Nun ist

$$(x_1 + x_3)(x_2 + x_4) = \Sigma x_1x_2 - (x_1x_3 + x_2x_4)$$
$$(x_1 + x_3) + (x_2 + x_4) = \Sigma x_1.$$

Danach kann durch Adjunktion einer Quadratwurzel $\frac{x_1 + x_3}{2}$ und $\frac{x_2 + x_4}{2}$ gefunden werden. Beachtet man noch, daß die Symmetrielinie des gleichschenkligen Trapezes durch den Umkreismittelpunkt M $(\frac{1}{2}x_e \; \frac{1}{2}y_e)$ und den Schwerpunkt S $(\frac{1}{4}\Sigma x_1 | \frac{1}{4}\Sigma y_1)$ läuft, so erkennt man, daß mit $\frac{1}{2}(x_1 + x_3)$ und $\frac{1}{2}(x_2 + x_4)$ die Seitenmitten $M_{1,3}$ und $M_{2,4}$ bekannt werden, womit die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4 sofort angebbar sind.

Zu algebraisch einfacheren Resultaten, als sie die Trapezgruppierung geliefert hat, führt die folgende Fragestellung: Wo liegen alle Punkte K_e, für welche diejenigen vier Strahlen je harmonisch sind, die einen jeden Punkt K_e mit den vier zugehörenden Punkten K verbinden?

In § 2 war der Satz abgeleitet: Bild (K_e) und Original (K) liegen immer auf einem Strahl durch den Punkt $\mathfrak{B}$ $(0 | B)$, den gemeinsamen Punkt von Bild- und Originalkreis. Dieser Satz, der oben nur für den elliptischen Fall ausgesprochen war, bleibt als Folgerung aus der allgemein gültigen Gleichung IX (§ 1) auch hier bestehen. Hiernach müssen die vier Punkte $\mathfrak{B}$ auf der Polnormale, deren Ordinaten die Wurzeln B_1, B_2, B_3, B_4 von (24γ) sind, ein harmonisches Quadrupel bilden, d. h. das Doppelverhältnis

$$\frac{(B_1 - B_2)(B_3 - B_4)}{(B_1 - B_4)(B_3 - B_2)}$$

muß den Wert -1 haben, oder es muß

$$(B_1 - B_2)(B_3 - B_4) - (B_1 - B_4)(B_2 - B_3) = 0$$

werden. Um von hier aus eine Bedingung für die Punkte K_e zu finden, bilden wir das Produkt aus der eben geschriebenen Relation und den zwei zu ihr konjugierten. Dies Produkt ist eine Invariante der Gleichung (24γ), deren Wert sich

leicht durch ihre Koeffizienten ausdrücken läßt. Als Gleichung des gesuchten Ortes finden wir:

$$J \equiv 9g^2y_e^2(4f^2+3g^2) - 18fg^2y_e^3 - 16f^3y_e^3 - \\ -9p_e^2(4fg^2y_e + 12f^2g^2 + 3y_e^2g^2) = 0.$$

Auch hier ist es möglich, mit Zirkel und Lineal zu einem Punkte K_e, der auf J liegt, die vier zugehörenden Punkte K zu konstruieren; denn die obige Beziehung zwischen den vier Wurzeln B erlaubt die Substitutionen der Gruppe

(1), (24), (13), (13)(24), (12)(34), (14)(23),

auf die sich also die Gleichungsgruppe von (24γ) reduziert. Man muß dann dem Rationalitätsbereich noch drei Quadratwurzeln adjungieren, um die Gleichung (24γ) in vier, im erweiterten Körper rationale Faktoren zerlegen zu können.

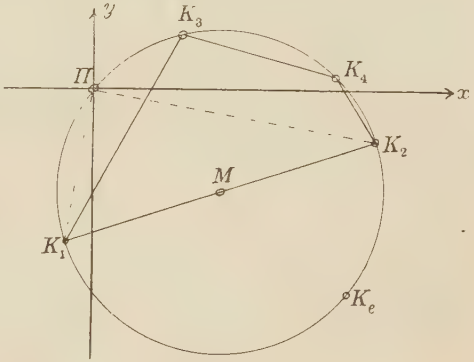


Fig. 24 α.

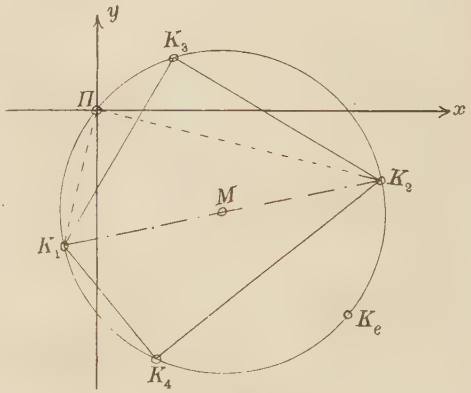


Fig. 24 β.

Wir betrachten jetzt ein drittes Beispiel spezieller Gruppierung. Wo liegen alle Punkte K_e, für welche zwei der ihnen entsprechenden Punkte K Gegenpunkte des Kreises über ΠK_e sind? Es soll demnach eine Seite (Fig. 24α) oder eine Diagonale (Fig. 24β) des Vierecks $K_1K_2K_3K_4$ Durchmesser des Umkreises sein.

Verbindet man die Ecken K_1 und K_2, die Durchmesserendpunkte sein mögen, mit Π, so steht ΠK_2 auf ΠK_1 senkrecht, also ist

$$\frac{x_1}{y_1} \cdot \frac{x_2}{y_2} = -1;$$

nach (28α) und (28β) ergibt sich hieraus die Beziehung:

$$B_1 B_2 - y_e(B_1 + B_2) + p_e^2 = 0. \qquad (32\alpha)$$

Die Gleichung (24γ) gibt ferner

$$\begin{aligned} &B_3 + B_4 = y_e - 2f - (B_1 + B_2) \\ &B_1 B_2 + B_3 B_4 + (B_1 + B_2)(B_3 + B_4) = -2f y_e \\ &(B_1 + B_2) B_3 B_4 + (B_3 + B_4) B_1 B_2 = -g^2 y_e \\ &B_1 B_2 \cdot B_3 B_4 = -g^2 p_e^2. \end{aligned}$$

Aus den fünf letzten Relationen eliminieren wir $B_1 B_2$, $B_3 B_4$ und $(B_3 + B_4)$; es folgen für $(B_1 + B_2)$ die zwei Beziehungen

$$B_1 + B_2 = \frac{g^2 y_e - p_e^2 y_e - 2 f p_e^2}{p_e^2 - y_e^2 + g^2}$$

$$(B_1 + B_2)^2 - (y_e - 2f)(B_1 + B_2) + p_e^2 - g^2 = 0. \qquad (32\beta)$$

Würde man hier $(B_1 + B_2)$ entfernen, so würde sich zwar der gesuchte geometrische Ort ergeben, aber er würde als eine wenig übersichtliche Kurve 6. Ordnung erscheinen. Wir eliminieren statt dessen zuerst p_e^2 und finden als Ergebnis:

$$(B_1 + B_2)^3 + 4f(B_1 + B_2)^2 + (4f^2 - 2g^2)(B_1 + B_2) - 2fg^2 = 0. \qquad (32\gamma)$$

Diese Gleichung aber ist frei von y_e, d. h. $(B_1 + B_2)$ hat drei konstante Werte. Geht man auf (32β) zurück, so erkennt man: Der verlangte geometrische Ort besteht aus 3 Kreisen. Die Ausgangsbedingung (32α) zeigt weiter, daß auch $B_1 \cdot B_2$ konstant ist; man braucht nur von ihr die Gleichung (32β) abzuziehen. Sonach ist sowohl B_1 als auch B_2 konstant. Dies aber ergibt den Satz:

Der verlangte geometrische Ort besteht aus drei, im allgemeinen irreduzibel verknüpften Bildkreisen, wie sie zur Feststellung der Überdeckungszahl verwandt worden sind.

Es ist nun festzustellen, wodurch diese drei Bildkreise sich auszeichnen. Dazu stellen wir folgende geometrische

Betrachtung an: Verbindet man K_e mit K_1 und K_2, so ist $\sphericalangle K_1 K_e K_2 = 90^0$. Die Geraden $K_e K_1$ und $K_e K_2$ treffen die Polnormale in den Punkten $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ nach dem schon im vorhergehenden Beispiel herangezogenen Satze (Fig. 25). Nun geht stets einer der vier durch K_e laufenden Bildkreise durch $\mathfrak{B}_1$, ein zweiter durch $\mathfrak{B}_2$. Da außerdem die Bildkreise ihre Mittelpunkte auf der Polnormale haben, so sind durch die Angabe von K_e, $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ zwei Bildkreise bestimmt. In unserem speziellen Falle ist $\triangle \mathfrak{B}_1 K_e \mathfrak{B}_2$ ein Rechter; daher kommen hier die zwei Bildkreise zur Deckung, aber es fällt — nach der Bezeichnung von § 7 — $\mathfrak{A}_1$ mit $\mathfrak{B}_2$ und $\mathfrak{A}_2$ mit $\mathfrak{B}_1$ zusammen. Diese zwei Gegenpunktpaare vertauschen also gerade ihre Rollen. Von hier aus kann auch die Gleichung (32γ) wiedergewonnen werden. Man hat nur auszudrücken, daß $\mathfrak{B}_1$ mit $\mathfrak{A}_2$ und $\mathfrak{B}_2$ mit $\mathfrak{A}_1$ koinzidieren soll: dies gibt die zwei Relationen

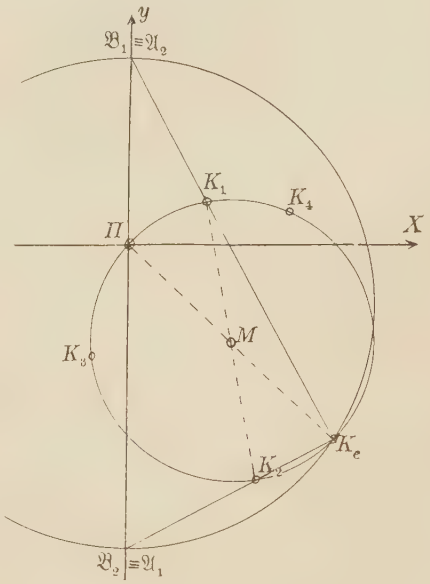


Fig. 25.

$$B_1 = -\frac{B_2^2}{g^2}(B_2 + 2f) \quad \text{und} \quad B_2 = -\frac{B_1^2}{g^2}(B_1 + 2f),$$

aus denen (32γ) leicht zu folgern ist.

Wieder lassen sich die vier Punkte K, die einem Punkte K_e entsprechen, mit Zirkel und Lineal konstruieren. Denn K_e liegt auf einem der drei speziellen Bildkreise, der die y-Achse in $\mathfrak{B}_1$ und $\mathfrak{B}_2$ schneiden möge. Zu diesem Bildkreise gehören nach obigen Erwägungen zwei Originalkreise: einer mit $\Pi\mathfrak{B}_1$, der andere mit $\Pi\mathfrak{B}_2$ als Durchmesser.

Die Geraden $\mathfrak{B}_1 K_e$ und $\mathfrak{B}_2 K_e$ schneiden die beiden Originalkreise in K_1 resp. K_2. Für die Koordinaten der noch fehlenden Punkte K_3 und K_4 verbleiben naturgemäß zwei quadratische Gleichungen. Analytisch folgt das gleiche Resultat bereits aus der Bedingung (32α): denn dies ist eine rationale Beziehung zwischen den Wurzeln von (24γ), und sie erlaubt nur die Substitutionen der Gruppe (1), (12), (34), (12) (34). Demnach wird die Gruppe von (24γ) intransitiv, die Gleichung selbst also reduzibel, nämlich spaltbar in zwei quadratische Gleichungen.

Greift man einen der drei oben gefundenen Bildkreise heraus und faßt ihn als Kurve von Punkten K_e auf, so entspricht ihm vermöge der Verwandtschaft eine Kurve von Punkten K. Die Kurve aber zerfällt nach dem Besprochenen in zwei quadratisch verbundene Kreise — nämlich die beiden Originalkreise über $\Pi\mathfrak{B}_1$ und $\Pi\mathfrak{B}_2$ — und in eine gewisse andere Kurve. Zu jedem Punkte K_e gehört dann ein Punkt K_1 auf dem ersten Originalkreise, ein Punkt K_2 auf dem zweiten und zwei Punkte K_3 und K_4 auf der Restkurve. Dabei sind K_1 und K_2, ebenso K_3 und K_4 je durch eine quadratische Beziehung verknüpft.

Erwähnt sei noch, daß das Zerfallen der transformierten Kurve bei der betrachteten Gruppierung des Quadrupels K_1, K_2, K_3, K_4 nicht eine spezielle Eigentümlichkeit unserer Verwandtschaft darstellt. Es tritt vielmehr immer eine Spaltung in zwei unabhängige Teile ein, wenn man in einer ein-vierdeutigen Verwandtschaft den entsprechenden Ort transformiert; nur müssen, damit die Fragestellung möglich ist, die vier einem Punkte entsprechenden Punkte je auf einem Kreise gelegen sein.

Im vorigen sind drei Fälle betrachtet worden, in denen die Gruppierung der Punkte K einer Forderung unterworfen ist; es ergibt sich jedesmal eine Kurve von Punkten K_e, sodaß jedem ihrer Punkte ein Quadrupel der verlangten Art entspricht. Jetzt werden wir gleichzeitig zwei Forderungen an das Kreisviereck stellen; dann können sich nur einzelne

Punkte K_e ergeben, denen Vierecke der verlangten Form zugeordnet sind.

Wir kommen zu Punkten K_e mit zweifach spezialisierter Gruppierung des zugeordneten Quadrupels, wenn wir die Schnittpunktsysteme von je zwei der folgenden Kurven betrachten: 1. der Diskriminantenkurve Δ, 2. der T-Kurve, 3. der J-Kurve, 4. des zuletzt bestimmten Kreistripels – abgekürzt der D-Kurve.

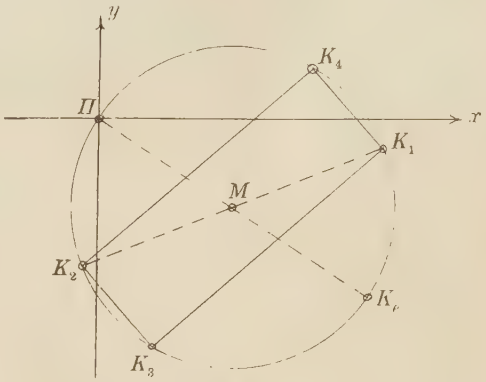


Fig. 26 α.

Liegt erstlich ein Punkt K_e gleichzeitig auf der T- und der D-Kurve, so muß das ihm zugeordnete Kreisviereck ein Trapez sein, von dem zwei Ecken Endpunkte eines Umkreisdurchmessers sind.

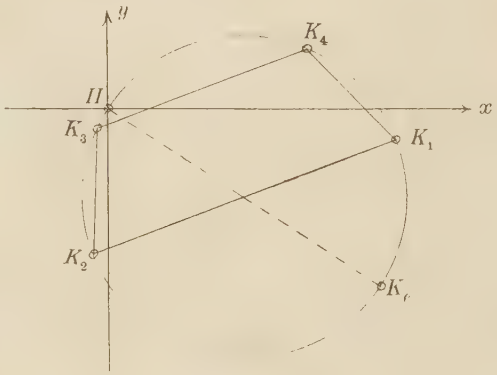


Fig. 26 β.

Zwei Fälle müssen unterschieden werden: Es kann eine Diagonale des Trapezes Durchmesser sein, dann wird das Viereck zum Rechteck (Fig. 26 α); es kann eine der parallelen Seiten Durchmesser sein (Fig. 26 β). Würde man das volle Schnittpunktsystem von T und D bilden, so würde man unter den zu den Schnittpunkten gehörenden Vierecken beide vorgenannten Arten gleichzeitig finden. Um speziell die Punkte zu finden, denen Rechtecke entsprechen, schlagen wir deshalb einen etwas anderen Weg ein. Soll $K_1 K_2 K_3 K_4$ ein Rechteck

sein, so muß die Relation (32α) für zwei Indexpaare gleichzeitig bestehen; es ist also

$$B_1B_2 - y_e(B_1+B_2) + p_e^2 = 0 \qquad (33\alpha)$$

$$B_3B_4 - y_e(B_3+B_4) + p_e^2 = 0 \qquad (33\beta)$$

Wir addieren und multiplizieren diese zwei Gleichungen und finden:

$$B_1B_2 + B_3B_4 - y_e\Sigma B_1 \quad 2p_e^2 = y_e^2 \quad p_e^2 - 2fy_e$$

$$B_1B_2B_3B_4 = p_e^4 - y_e p_e^2 \Sigma B_1 + y_e^2(\Sigma B_1B_2 - B_1B_2 - B_3B_4). \qquad (34\alpha)$$

Eliminiert man hier $(B_1B_2+B_3B_4)$ und entfernt die symmetrischen Funktionen der Wurzeln B mittels der Gleichungskoeffizienten von (24γ), so ergibt sich:

$$p_e^4 - y_e^4 + p_e^2(y_e^2 + 2fy_e + g^2) = 0 \qquad (34\beta)$$

Multipliziert man weiter (33α) mit (B_3+B_4), (33β) mit (B_1+B_2) und addiert, so findet man:

$$\Sigma B_1B_2B_3 - 2y_e(\Sigma B_1B_2 - B_1B_2 - B_3B_4) + p_e^2\Sigma B_1 = 0.$$

Unter Benutzung von (34α) folgt hieraus:

$$(p_e^2 - y_e^2)(2f+3y_e) + y_e(y_e^2 + 2fy_e + g^2) = 0. \qquad (34\gamma)$$

Schließen wir den Fall aus, daß K_e mit einem der beiden Fundamentalpunkte F_1 oder F_2 zusammenfällt, so finden wir aus (34β) und (34γ):

$$p_e^2(2f+3y_e) = y_e(p_e^2 + y_e^2); \qquad (34\delta)$$

subtrahiert man endlich (34δ) von (34γ), so bleibt

$$p_e^2 - y_e^2 = x_e^2 = -g^2.$$

Damit ist der Satz gefunden: Die Punkte K_e, denen Rechtecke entsprechen, liegen auf den beiden Parallelen zur Polnormale im Abstande $\sqrt{-g^2}$.

Führt man endlich den Wert von p_e^2, nämlich $y_e^2 - g^2$, in die Gleichung (34δ) ein, so findet sich die kubische Gleichung

$$y_e^3 + 2fy_e^2 - 2g^2y_e - 2fg^2 = 0,$$

wonach es sechs Punkte K_e der verlangten Art gibt.

Die sechs Punkte sind gleichzeitig Doppelpunkte der Kuren D und T, wie rechnerisch leicht zu verifizieren ist. Man kann indes dieselbe Tatsache aus der

folgenden Überlegung erschließen: Längs eines Kurvenstückes, das die A-Kurve nirgends trifft, läßt sich eindeutig jede der vier zu einem Punkte K_e gehörenden Wurzeln B als Funktion der Koordinaten x_e und y_e definieren, sodaß jede Wurzel durch einen bestimmten Funktionszweig repräsentiert wird. Der Bedingung (33α) entsprechen also, sobald jeder Wurzel B ein Funktionszweig zugewiesen ist, bestimmte Teile der D-Kurve, der Bedingung (33β) bestimmte andere Teile. Soll ein Punkt K_e beide Bedingungen (33) erfüllen, so muß er gleichzeitig auf einem Teile der ersten und der zweiten Art liegen, d. h. er muß Doppelpunkt der D-Kurve sein.

Wir fügen noch einen analytischen Beweis an, der auch auf analoge Fälle übertragbar ist. Die Größen (B_1+B_2) und $B_1 \cdot B_2$ gehören zur selben Gruppe und sind also rational durch einander darstellbar. Die Beziehung (33α) kann demnach in eine Gleichung für $B_1 \cdot B_2$ umgeformt werden, deren Koeffizienten rational von x_e und y_e abhängen. Denkt man gleichzeitig diejenige Gleichung 6. Grades aufgestellt, der das Produkt $B_1 \cdot B_2$ für jeden beliebigen Punkt K_e genügt, so erhält man von hier aus die Gleichung der D-Kurve, wenn man die Resultante dieser beiden Gleichungen gleich Null setzt. Für jeden Punkt der D-Kurve haben daher die zwei Gleichungen eine Wurzel gemein; für einen Punkt K_e aber, der den beiden Bedingungen (33) unterworfen ist, haben obige zwei Gleichungen zwei Wurzeln gemein. Dann verschwinden nach bekannten algebraischen Sätzen die zwei partiellen Ableitungen der Resultante nach x_e und y_e, d. h. D hat diese Punkte K_e zu Doppelpunkten.. — Um das Analoge für die T-Kurve nachzuweisen, geht man davon aus, daß im Rechteck zwei Paar Gegenseiten parallel sind, daß also zwei Bedingungen der Form (30ε) zu erfüllen sind, wenn einem Punkte K_e ein Rechteck entsprechen soll. Der Beweis verläuft dann wie der eben geführte.

Die Punkte K_e, denen Rechtecke entsprechen, bestehen demnach aus den sechs Punkten, in denen sich diejenigen

drei Bildkreise schneiden, die zusammengenommen die D-Kurve ausmachen; sie liegen zu je drei resp. auf den Geraden $x = \pm\sqrt{1 - y^2}$. Wie man leicht zeigt, sind sie imaginär außer in den Fällen $-R < r < -\frac{R}{2}$, wo ein Paar reell ist: doch es entspricht auch diesen zwei Punkten je nur ein imaginäres Quadrupel.

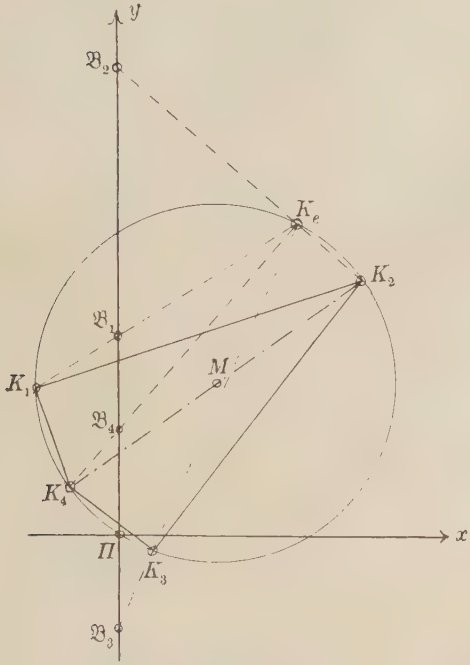


Fig. 27.

Als nächstes Beispiel zweifach spezialisierter Gruppierung betrachten wir das folgende: Wo liegen alle Punkte K_e, denen Deltoide entsprechen? Sind (Fig. 27) K_2 und K_4 diejenigen 2 Ecken des Deltoides, von denen die gleichen Seitenpaare ausgehen, so ist K_2K_4 Durchmesser des Umkreises; die verlangten Punkte K_e liegen deshalb erstlich auf der D-Kurve. Weiter muß aber

$$\sphericalangle K_1K_eK_1 - \sphericalangle K_4K_eK_3$$

sein wegen der Gleichheit der Sehnen K_4K_1 und K_4K_3. Da nun $\sphericalangle K_2K_eK_4 = 90^0$ ist, so ist das Strahlenquadrupel K_eK_1, K_eK_2, K_eK_3, K_eK_4 harmonisch, d. h. die gesuchten Punkte K_e müssen auch auf der J-Kurve liegen; sie sind demnach unter den Schnittpunkten der J- und der D-Kurve anzutreffen. Indes entsprechen nicht allen Schnittpunkten dieser beiden Kurven Deltoide: sind beispielsweise die Durchmesserenden mit K_2 und K_4 bezeichnet, so werden sich unter den Schnittpunkten K_e auch solche finden, für die das Strahlenpaar K_eK_1, K_eK_2 harmonisch durch das Paar K_eK_3, K_eK_4 getrennt wird, und dann ist $K_1K_2K_3K_4$ kein

Deltoid. Um nun die Punkte K_e, denen Deltoide entsprechen, gesondert zu erhalten, verfahren wir ähnlich wie im Falle der Rechtecke.

Die Bedingung, daß K_2K_4 ein Durchmesser ist, zieht die Relation nach sich:

$$B_2B_4 = y_e(B_2+B_4) - p_e^2.$$

Sollen ferner die Strahlen K_2K_e, K_4K_e harmonisch getrennt werden durch K_1K_e, K_3K_e, so ist

$$\frac{(B_1-B_2)(B_3-B_4)}{(B_1-B_4)(B_3-B_2)} = -1.$$

Aus diesen zwei Beziehungen entfernen wir die Wurzeln B durch Bildung von symmetrischen Funktionen. Aus der letzteren aber folgt unter Benutzung der biquadratischen Gleichung für B (24γ):

$$B_1B_3+B_2B_4+\tfrac{3}{2}fy_e = 0.$$

Wir formen diese Relation noch in folgender Weise um:

$$0 = (B_1B_3+B_2B_4)+\tfrac{2}{3}fy_e = \Sigma B_1B_2-(B_2+B_4)(B_1+B_3)+\tfrac{2}{3}fy_e =$$
$$= -\tfrac{4}{3}fy_e-(B_2+B_4)(\Sigma B_1-[B_2+B_4]);$$

sonach ist

$$(B_2+B_4)^2+(2f\quad y_e)(B_2+B_4)-\tfrac{4}{3}fy_e = 0. \qquad (35\alpha)$$

Ferner verschaffen wir uns mittels der zwei Ausgangsbedingungen noch zwei Gleichungen für (B_2+B_4); es ist erstlich:

$$-g^2y_e = \Sigma B_1B_2B_3 = B_2B_4(B_1+B_3)+B_1B_3(B_2+B_4) =$$
$$= \{y_e(B_2+B_4)-p_e^2\}\cdot\{\Sigma B_1-(B_2+B_4)\}+\{B_2+B_4\}\cdot$$
$$\cdot\{p_e^2-y_e(B_2+B_4)-\tfrac{2}{3}fy_e\}$$

mithin folgt:

$$-2y_e(B_2+B_4)^2+(2p_e^2+y_e^2-\tfrac{8}{3}fy_e)(B_2+B_4)+$$
$$+(2fp_e^2-y_ep_e^2+g^2y_e) = 0. \qquad (35\beta)$$

Schließlich hat man

$$-g^2p_e^2 = B_1B_3B_2B_4 = B_1B_3\cdot\{y_e(B_2+B_4)-p_e^2\}:$$

hieraus ergibt sich

$$y_e^2(B_2+B_4)^2+(\tfrac{2}{3}fy_e^2-2y_ep_e^2)(B_2+B_4)+$$
$$+p_e^2(p_e^2-g^2\quad\tfrac{2}{3}fy_e) = 0. \qquad (35\gamma)$$

Multipliziert man (35α) mit y_e^2, (35β) mit y_e, (35γ) mit 1 und addiert die drei Gleichungen, so erhält man:

$$x^2(p_e^2 + \tfrac{4}{3} f y_e - g^2) = 0.$$

Sieht man von dem interesselosen Fall $x = 0$ ab, so darf man den Satz aussprechen: Die Punkte K_e, denen Deltoide entsprechen, befinden sich auf dem Kreise

$$p_e^2 + \tfrac{4}{3} f y_e - g^2 = 0.$$

Da sie außerdem noch auf der D-Kurve gelegen sind, so müssen sie aus den sechs Punkten bestehen, in denen der eben gefundene Kreis die drei Kreise der D-Kurve durchsetzt.

Wir beschließen die Betrachtungen über zweifach spezialisierte Gruppierung mit der Aufgabe: Es sind die Punkte K_e anzugeben, denen rechtwinklige Dreiecke zugehören. Soll einem Punkte K_e ein Dreieck, d. h. nur 3 Punkte K_i entsprechen, so muß er auf der Δ-Kurve liegen; soll das Dreieck außerdem noch rechtwinklig sein, so müssen zwei der zugeordneten Punkte K Enden eines Durchmessers sein, d. h. die gesuchten Punkte K_e müssen gleichzeitig auch auf der D-Kurve gelegen sein. Wieder lassen sich unter den Schnittpunkten der zwei Kurven, auf denen sich die verlangten Punkte K_e befinden, zwei Arten unterscheiden. Werden nämlich mit K_1 und K_2 die zwei Durchmesserenden bezeichnet, so kann das rechtwinklige Dreieck $K_1K_2K_3$ dadurch aus dem Kreisviereck $K_1K_2K_3K_4$ hervorgegangen sein, daß entweder K_3 und K_4 in K_3 zusammengefallen sind, oder auch dadurch, daß K_2 und K_4 sich in K_2 vereint haben. Auch hier ist es möglich, beide Arten von Schnittpunkten zu trennen.

Der erste Fall (Fig. 28α) ist analytisch charakterisiert durch die 2 Bedingungen:

$$B_1B_2 - y_e(B_1 + B_2) + p_e^2 = 0$$
$$B_3 = B_4.$$

Aus diesen zwei Relationen folgt:

$$B_1B_2 = y_e(\Sigma B_1 - B_3 - B_4) - p_e^2 = y_e(y_e - 2f - 2B_3) - p_e^2 = \\ = -(x_e^2 + 2fy_e + 2B_3y_e). \qquad (36)$$

Die Bedeutung der Gleichungskoeffizienten von (24γ) gibt die Beziehungen:

$$-2fy_e = \Sigma B_1 B_2 = B_1 B_2 + 2B_3(B_1+B_2) + B_3^2 = B_1 B_2 + \\ + 2B_3(\Sigma B_1 - 2B_3) + B_3^2$$

$$-g^2 y_e = \Sigma B_1 B_2 B_3 = 2B_1 B_2 B_3 + B_3^2(B_1+B_2) = 2B_1 B_2 B_3 + \\ + B_3^2(\Sigma B_1 - 2B_3)$$

$$-g^2 p_e^2 = B_1 B_2 B_3 B_4 = B_1 B_2 B_3^2.$$

Entfernt man mittels (36) aus jeder der eben gefundenen Gleichungen die Größe $B_1 B_2$, so findet man:

$$3B_3^2 + 4B_3 f + x_e^2 = 0$$

$$2B_3^3 + B_3^2(3y_e + 2f) + 2B_3(x_e^2 + 2fy_e) - g^2 y_e = 0$$

$$2B_3^3 y_e + B_3^2(x_e^2 + 2fy_e) - g^2 p_e^2 = 0.$$

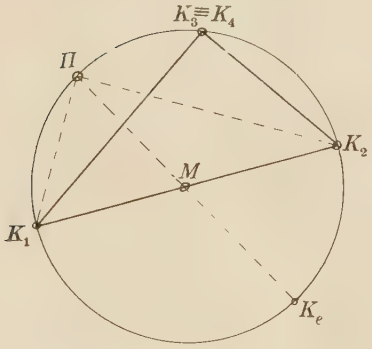


Fig. 28 α.

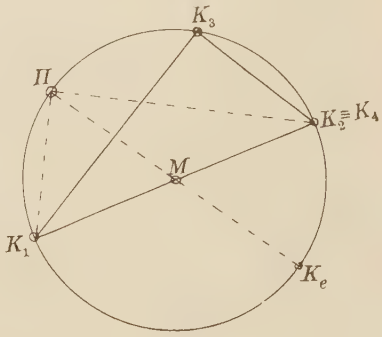


Fig. 28 β.

Multipliziert man endlich, um B_3 zu eliminieren, die drei letzten Gleichungen der Reihe nach mit $+y^2$, $-y$, $+1$ und addiert, so ergibt sich zunächst die einfache Relation:

$$x_e^2\{B_3^2 - 2B_3 y_e + y_e^2 - g^2\} = 0$$

und es folgt, von der unwesentlichen Lösung $x_e = 0$ abgesehen:

$$B_3 = y_e \pm \sqrt{g^2};$$

wegen $\Sigma B_1 = y_e - 2f$ aber erhält man

$$y_e = -2f + 2\sqrt{g^2 - (B_1+B_2)}.$$

Die geforderten Punkte K_e sind nun auf der D-Kurve gelegen; längs jedes der drei Kreise, aus denen diese be-

steht, ist, wie früher gezeigt, die Größe (B_1+B_2) konstant. Die zuletzt gefundene Beziehung lehrt demnach, daß es auf jedem der drei Kreise vier Punkte der verlangten Art gibt, d. h. im ganzen existieren zwölf Punkte K_e, denen je ein rechtwinkliges Dreieck der ersten Entstehungsart entspricht.

Soll ferner einem Punkte K_e ein rechtwinkliges Dreieck der zweiten Art zugehören, so bestehen gleichzeitig die Bedingungen:

$$B_1 B_2 - y_e(B_1+B_2)+p_e^2=0 \qquad (37\alpha)$$

$$B_2 = B_4. \qquad (37\beta)$$

Mittels der Koeffizienten von (24γ) leitet man unter Beachtung von (37β) die Gleichungen ab:

$$y_e - 2f = \Sigma B_1 = (B_1+B_2)+B_2+B_3$$
$$-2fy_e = \Sigma B_1 B_2 = B_1B_2+(B_1+B_2)(B_2+B_3)+B_2B_3.$$

Eliminiert man hieraus B_3 und ersetzt zur Abkürzung (B_1+B_2) durch σ und $B_1 \cdot B_2$ durch τ, so folgt für B_2 die Gleichung

$$B_2^2 - B_2(y_e-2f-\sigma)+(g^2-\sigma y_e-2fy_e)=0.$$

Der Bedeutung von b und τ entsprechend genügt B_2 der zweiten Gleichung

$$B_2^2-\sigma B_2+\tau=0. \qquad (38)$$

Aus den letzten zwei Beziehungen kann endlich B_2 entfernt werden; es ergibt sich offenbar eine quadratische Gleichung für y_e, die wegen der Irreduzibilität von (38) auch irreduzibel sein muß. Dabei ist σ für jeden der drei Kreise der D-Kurve eine bestimmte Wurzel der kubischen Gleichung:

$$\sigma^3+4f\sigma^2+(4f^2-2g^2)\sigma-2fg^2=0 \qquad (39\alpha)$$

und es ist zu jedem σ ein τ gehörig, das bestimmt wird aus der Relation:

$$\tau=\sigma^2+2f\sigma-g^2. \qquad (39\beta)$$

Auf jedem Kreise der D-Kurve liegen also 4 Punkte K_e der verlangten Art. Demnach gibt es 12 Punkte K_e, denen rechtwinklige Dreiecke der zweiten Entstehungsweise entsprechen.

Ein wesentlicher Unterschied aber besteht zwischen den Schnittpunkten des ersten und zweiten Falles: In den

12 Schnittpunkten der ersten Art durchsetzen sich die D- und die Δ-Kurve, während sie sich in den 12 anderen Punkten K_e berühren. Um dies rechnerisch nachzuweisen, hat man nur die Tangentenrichtungen der beiden Kurven in den betrachteten Punkten zu vergleichen. Wir beschränken uns auf den zweiten Fall. Sei σ eine bestimmte der drei Wurzeln von (39α); der ihr zugehörende Kreis von D hat die Gleichung (37α):

$$x_e^2 + y_e^2 - y_e\sigma + \tau = 0;$$

man findet demnach als Richtung der Kreistangente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\sigma - 2y}.$$

Für einen Punkt auf der Δ-Kurve aber folgt aus (24γ)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{\frac{Bg^2 - 2fB^2 - B^3}{g^2} - 2y}$$

Dabei ist B die Doppelwurzel, die die Gleichung (24γ) besitzt, weil die betrachteten Punkte K_e auf der D-Kurve liegen; oben ist B_2 statt B geschrieben worden. Mittels der Relationen (38), (39α), (39β) zeigt man aber leicht, daß

$$\frac{B_2 g^2 - 2fB_2^2 - B_2^3}{g^2} = \sigma$$

ist, womit das Zusammenfallen der Tangenten bewiesen ist.

Daß die drei Kreise der D-Kurve die Δ-Kurve berühren, folgt bereits daraus, daß es drei Bildkreise sind; aber jetzt ist festgestellt, daß diese drei speziellen Bildkreise die Hüllende in vier Punkten berühren, im Gegensatz zu den anderen Bildkreisen, die nur je zwei Punkte mit der Δ-Kurve gemein haben. Die Ausnahmestellung der drei D-Kreise ist nur scheinbar; jeder von ihnen tritt zweimal als Bildkreis auf, vereint daher auch die Eigenschaften zweier Bildkreise in sich.

Man hätte auch ohne nähere Kenntnis der D-Kurve im voraus beweisen können, daß sie in den Schnittpunkten K_e der zweiten Art die Δ-Kurve berühren muß, falls nur D keine Spitze besitzt. Wir greifen, um den Beweis zu er-

bringen, irgend einen Punkt K_e auf D heraus; wegen der Durchmesserrelation (37 a) sind dann B_1 und B_2 entweder gleichzeitig reell oder gleichzeitig imaginär. Wir laufen solange auf D hin, bis wir einmal an die Δ-Kurve kommen und zwar, wie noch vorausgesetzt werden muß, an einen singularitätenfreien Punkt der Δ-Kurve. Dann tritt entweder der erste Typus beim entsprechenden rechtwinkligen Dreieck auf ($K_3 \equiv K_4$); hier machen wir keine Aussage; oder es ergibt sich ein rechtwinkliges Dreieck zweiter Art ($K_4 \equiv K_2$): träte an dieser Stelle D durch Δ hindurch, so würde die Ecke B_2 reell oder imaginär, je nachdem sie vorher imaginär oder reell gewesen ist, während die Ecke B_1 ihre Natur nicht ändern würde. Nach dem Überschreiten von Δ wäre demnach eine der beiden Ecken B_1 und B_2 reell, die andere imaginär, und das ist wegen (37 a) unmöglich. In den Punkten K_e, denen rechtwinklige Dreiecke der zweiten Art entsprechen, kann also D die Δ-Kurve nicht überschreiten. Da D ohne Spitzen vorausgesetzt ist, müssen sich demnach in einem solchen Punkte K_e die Kurven D und Δ berühren.

Waren in den drei letzten Beispielen an das Viereck $K_1K_2K_3K_4$, das einem Punkte K_e entspricht, zwei Forderungen gestellt worden, so soll jetzt noch ein Fall behandelt werden, in dem die Gruppierung des Quadrupels dreifach spezialisiert ist. Es sollen nämlich diejenigen Punkte K_e bestimmt werden, denen Quadrate zugehören. Nun existieren solche Punkte K_e, denen Rechtecke entsprechen, in jeder unserer Verwandtschaften, d. h. für beliebiges Radienverhältnis $\frac{R}{r}$. Soll aber sich unter diesen Rechtecken ein Quadrat finden, so muß zwischen den Radien R und r oder auch zwischen f und g^2 eine Beziehung bestehen. Diese ist zu ermitteln.

Ein Quadrat ist sowohl Rechteck als Deltoid; es muß daher die Bedingung für ein Rechteck mit der Bedingung für ein Deltoid koinzidieren. Diese Überlegung gibt die drei Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} p_e^2 - y_e^2 = -g^2 \\ y_e^3 + 2fy_e^2 - 2g^2 y_e \quad 2fg^2 = 0 \end{array}\right\} \text{(Rechtecksbedingung)}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_e^2 + \frac{4}{3} f y_e - g^2 = 0 \end{array}\right\} \text{(Deltoidbedingung).}$$

Multipliziert man die erste Gleichung mit $+y_e$, die zweite mit $+1$, die dritte mit $-y_e$, addiert und kürzt das Resultat mit $\frac{2}{3}f$, so findet man

$$y^2 = 3g^2.$$

Mittels der ersten und dritten Beziehung folgert man hieraus noch

$$y_e = -\frac{3g^2}{4f}.$$

Die Vergleichung der letzten beiden Resultate ergibt als verlangte Bedingung

$$3g^2 = 16f^2.$$

Von dem Falle eines verschwindenden f abgesehen, muß demnach zwischen den Radien R und r die Gleichung

$$r = -\frac{11}{10} R$$

stattfinden, wenn sich unter den 6 Rechtecken zwei Quadrate vorfinden sollen.

Es hat sich also ergeben: Es existiert unter den betrachteten Verwandtschaften eine, in der zwei Punkten je ein Quadrat zugeordnet ist: diese zwei Punkte sind indes imaginär.

§ 10. Besondere Lagenbeziehungen zweier Bildpunktquadrupel zu einander; das Analogon für den elliptischen Fall.

Wir haben im vorigen verschiedene Gruppierungen des zu einem Punkte K_e gehörenden Punktquadrupels untersucht. Zum Schluß wollen wir gleichzeitig zwei Quadrupel betrachten und die Frage aufwerfen: Können zwei Punkte k_e und K_e so ausgewählt werden, daß die ihnen entsprechenden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen?

Einem jeden Punkte K_e gehören vier Punkte zu, die als Grundpunkte eines Kegelschnittbüschels aufgefaßt werden können. Unsre Frage kommt demnach auf die andere zurück:

Können zwei Punkte k_e und K_e so bestimmt werden, daß in den zwei zugeordneten Büscheln ein gemeinsamer Kegelschnitt enthalten ist? Sind x_e, y_e und X_e, Y_e die Koordinaten von k_e und K_e, ferner λ und Λ die entsprechenden Büschelparameter, so lauten die zwei entsprechenden Büschelgleichungen:

$$x^2(p_e^2 x_e + \lambda) + xy(y_e g^2 + y_e p_e^2 + 2fp_e^2) + y^2(x_e g^2 + \lambda) + \\ + x(x_e^2 g^2 - x_e \lambda) + y(-2g^2 x_e y_e - y_e \lambda) - g^2 x_e^3 = 0$$

$$x^2(P_e^2 X_e + \Lambda) + xy(Y_e g^2 + Y_e P_e^2 + 2fP_e^2) + y^2(X_e g^2 + \Lambda) + \\ + x(X_e^2 g^2 - X_e \Lambda) + y(-2g^2 X_e Y_e - Y_e \Lambda) - g^2 X_e^3 = 0.$$

Diese zwei Gleichungen sollen denselben Kegelschnitt darstellen; dann liefert die Koeffizientenvergleichung fünf Beziehungen für die sechs Größen x_e, y_e, λ, X_e, Y_e, Λ. Die vier letzteren können eliminiert werden, und es bleibt eine Relation zwischen x_e und y_e übrig. Somit ergibt sich als erstes Resultat: Ein Punkt k_e muß auf einer gewissen Kurve gelegen sein, damit man ihm einen Punkt K_e so zuordnen kann, daß die acht, k_e und K_e entsprechenden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

Die Koeffizientenvergleichung liefert:

$$\frac{p_e^2 x_e + \lambda}{-g^2 x_e^3} = \frac{P_e^2 X_e + \Lambda}{-g^2 X_e^3} \tag{40\alpha}$$

$$\frac{y_e g^2 + y_e p_e^2 + 2fp_e^2}{-g^2 x_e^3} = \frac{Y_e g^2 + Y_e P_e^2 + 2fP_e^2}{-g^2 X_e^3} \tag{40\beta}$$

$$\frac{x_e g^2 + \lambda}{-g^2 x_e^3} = \frac{X_e g^2 + \Lambda}{-g^2 X_e^3} \tag{40\gamma}$$

$$\frac{x_e^2 g^2 - \lambda x_e}{g^2 x_e^3} = \frac{X_e^2 g^2 - \Lambda X_e}{-g^2 X_e^3} \tag{40\delta}$$

$$\frac{-y_e(2g^2 x_e + \lambda)}{-g^2 x_e^3} = \frac{-Y_e(2g^2 X_e + \Lambda)}{-g^2 X_e^3} \tag{40\varepsilon}$$

Subtrahiert man (40γ) von (40α), so folgert man leicht:

$$Y_e^2 = \frac{y_e^2 X_e^2 - g^2(X_e^2 - x_e^2)}{x_e^2}. \tag{41}$$

Aus (40γ) und (40δ) lassen sich λ und Λ berechnen, und zwar findet man:

$$\Lambda = -\frac{X_e g^2 (2X_e + x_e)}{x_e} \qquad (42\alpha)$$

$$\lambda = -\frac{x_e g^2 (2x_e + X_e)}{X_e}. \qquad (42\beta)$$

Führt man diese Werte in (40ε) ein, so ergibt sich

$$Y_e = \frac{y_e X_e (X_e - 2x_e)}{x_e (x_e - 2X_e)}.$$

Eliminiert man endlich hieraus und aus (41) die Größe Y_e, dann erhält man:

$$3y_e^2 X_e^2 (X_e^2 - x_e^2) = g^2 (X_e^2 - x_e^2)(x_e - 2X_e)^2.$$

Zwei Fälle sind möglich; entweder ist

$$X_e = -x_e \qquad \text{(Fall A)}$$

oder es ist

$$y_e = \pm \tfrac{1}{3} g \sqrt{3}\, \frac{x_e - 2X_e}{X_e}. \qquad \text{(Fall B)}$$

In Fall A folgt weiter:

$$\Lambda = g^2 X_e = -g^2 x_e = -\lambda; \qquad Y_e = y_e,$$

während die Gleichung (40β) zeigt, daß jeder Punkt k_e der verlangten Art auf der Kurve

$$y_e (p_e^2 + g^2) + 2f p_e^2 = 0 \qquad (43)$$

gelegen sein muß. Wir fassen das Resultat in den Satz: Je zwei Punkten k_e und K_e, die auf (43) symmetrisch zur Polnormale liegen, entsprechen zusammen acht Punkte, durch die ein Kegelschnitt gelegt werden kann. Dieser wird, wenn x_e und y_e die Koordinaten von k_e sind, durch die Gleichung

$$x^2 (p_e^2 + g^2) + 2y^2 g^2 + 3y y_e g^2 - g^2 x_e^2 = 0$$

gegeben. Offenbar sind die Achsen aller dieser Kegelschnitte den Koordinatenachsen parallel, während die Centra auf der y-Achse liegen.

Die beiden den Punkten k_e und K_e entsprechenden Quadrupel liegen auch symmetrisch zur y-Achse; aber ihre Gruppierung läßt sich leicht noch etwas genauer feststellen. Für jeden Punkt auf (43) fällt in der Gleichung des zu-

gehörenden Büschels das Glied xy aus. Nun befinden sich in jedem Kegelschnittbüschel drei Geradenpaare; wegen der hier vorliegenden speziellen Gleichungsform sind von den sechs Winkelhalbierenden dieser drei Paare drei der x-Achse parallel, drei der y-Achse. Entsprechen dem Punkte K_e die Punkte K_1, K_2, K_3, K_4, dem Punkte k_e aber k_1, k_2, k_3, k_4, und ist zudem die Bezeichnung so gewählt, daß K_1 mit k_1 u. s. f. symmetrisch zur Polnormale liegt, so ist hier:

$$K_1K_2 \parallel k_3k_4, \quad K_1K_3 \parallel k_2k_4, \quad K_1K_4 \parallel k_2k_3, \quad K_2K_3 \parallel k_1k_4,$$
$$K_2K_4 \quad k_1k_3, \quad K_3K_4 \mid k_1k_2 \quad \text{(Fig. 29)}.$$

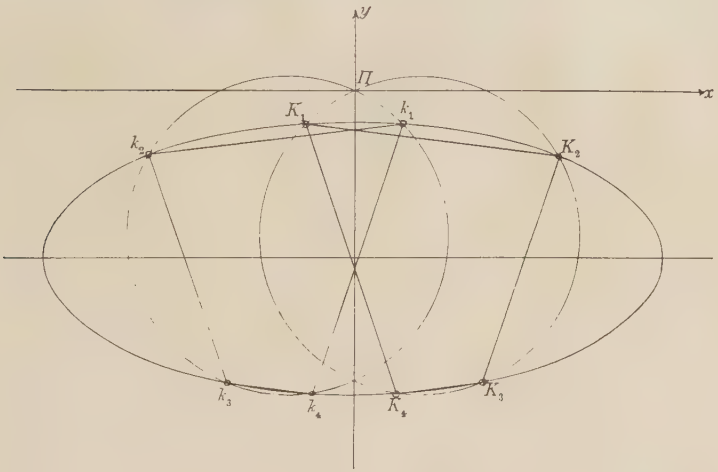


Fig. 29.

Es sei noch erwähnt, daß sich das einem Punkte k_e auf (43) entsprechende Quadrupel im allgemeinen nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren läßt. Geht man nämlich von der Forderung aus, daß die Winkelhalbierenden der Geraden k_1k_2 und k_3k_4 den Achsen parallel sein sollen, so findet man als algebraisches Äquivalent dieser Bedingung:

$$\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} + \frac{y_3 - y_4}{x_3 - x_4} = 0.$$

Setzt man aber diese Relation in eine Gleichung für die vier Wurzeln B um, so ergibt sich eine Beziehung zwischen

symmetrischen Funktionen der vier Wurzeln B, und diese rationale Beziehung reduziert die Gruppe der Gleichung (24γ, § 8) nicht.

Wir kommen zu Fall B. Zur Vereinfachung setzen wir an Stelle der beiden Konstanten $\pm\frac{1}{3}g\sqrt{3}$ eine einzige Größe h, sodaß also jedes Resultat im folgenden die Vertauschung von $+h$ mit $-h$ gestattet. Es ist hier:

$$X_e = \frac{hx_e}{y_e+2h} \qquad (44\alpha)$$

$$Y_e = \frac{-h(2y_e+3h)}{y_e+2h} \qquad (44\beta)$$

Sonach hängen auch diesmal zwei Punkte k_e und K_e durch eine lineare Transformation zusammen. Aber zwischen den vier Größen X_e, Y_e, x_e, y_e besteht noch die Beziehung (40β). Aus ihr entfernen wir X_e und Y_e und finden zwischen x_e und y_e die Gleichung:

$$(y_e+h)\cdot\{3h(x_e^2+5y_e^2+18hy_e+21h^2) - \\ -2f(x_e^2+4y_e^2+15hy_e+18h^2)\} = 0.$$

Der Faktor (y_e+h) ist für unsere Fragestellung belanglos. Die Gerade $y_e = -h$ enthält nämlich die selbstentsprechenden Punkte der linearen Substitution (44); längs dieser Geraden wird daher jeder Punkt k_e sich selbst zugeordnet. Beachtet man, daß die Vertauschung von $+h$ und $-h$ erlaubt ist, so erkennt man die Richtigkeit des Satzes: Wählt man auf einem der beiden Kegelschnitte

$$3h(x_e^2+5y_e^2+18hy_e+21h^2) - 2f(x_e^2+4y_e^2+15hy_e+18h^2) = 0 \quad (45\alpha)$$

$$3h(x_e^2+5y_e^2-18hy_e+21h^2)+2f(x_e^2+4y_e^2-15hy_e+18h^2) = 0 \quad (45\beta)$$

einen Punkt k_e und ordnet ihm vermöge von (44) einen Punkt K_e zu, so kann durch die acht Punkte, die K_e und k_e zusammen entsprechen, ein Kegelschnitt gelegt werden.

Es ist nun zu erörtern, wo der zu einem Punkte k_e gehörige Punkt K_e gelegen ist. Dazu untersuchen wir die geometrische Bedeutung der linearen Substitution (44) etwas genauer. Aus (44α) und (44β) folgt

$$\frac{x_e}{X_e} = \frac{y_e + 3h}{Y_e + 3h},$$

d. h. zwei einander zugeordnete Punkte k_e und K_e liegen immer auf einem Strahl durch den Punkt H $(0|-3h)$. Schneidet nun irgend ein Strahl durch H die Gerade $y_e = -h$, die die selbstentsprechenden Punkte von (44) trägt, in L, so wird, wie man leicht nachrechnet, das auf ihm liegende Punktepaar k_e und K_e durch H und L harmonisch getrennt. Da weiterhin die lineare Substitution (44) den Kegelschnitt (45) in sich transformiert, so folgt: Der Punkt H und die Gerade der selbstentsprechenden Punkte spielen in bezug auf den Kegelschnitt (45) die Rolle von Pol und Polare. Wir fassen zusammen:

Sollen im Falle B die zwei Punkten k_e und K_e entsprechenden acht Punkte auf einem Kegelschnitte liegen, so müssen k_e und K_e auf einem der beiden Kegelschnitte (45α) und (45β) gewählt werden und zwar so, daß ihre Verbindungslinie für (45α) durch H $(0|-3h)$, für (45β) durch H $(0|3h)$ geht.

Wenn aber ein Punkt k_e nicht auf (45α) oder (45β) liegt und wenn man ihm vermöge von (44) einen Punkt K_e zuordnet, so läßt sich (mit zwei durch den Fall A bedingten Ausnahmen) kein Kegelschnitt angeben, der durch die acht entsprechenden Punkte geht. Um auch dann noch eine Lagebeziehung der beiden zu k_e und K_e gehörenden Quadrupel zu finden, berechnen wir die Größen λ und Λ aus den Formeln (42) als Funktionen von x_e und y_e, resp. X_e und Y_e mittels (44) und erhalten

$$\lambda = -3hx_e(2y_e + 5h)$$
$$\Lambda = -3hX_e(2Y_e + 5h).$$

Diese zwei Parameterwerte sondern aus den zu k_e und K_e gehörenden Büscheln je einen Kegelschnitt aus, nämlich:

$$x^2x_e[p_e^2 - 3h(2y_e + 5h)] + xy(3h^2y_e + y_ep_e^2 + 2fp_e^2) - y^2 \cdot 6hx_e(y_e + 2h) +$$
$$+ x \cdot 6hx_e^2(y_e + 3h) + y \cdot 3hx_ey_e(2y_e + 3h) - 3h^2x_e^3 = 0$$
$$x^2X_e[P_e^2 - 3h(2Y_e + 5h)] + xy(3h^2Y_e + Y_eP_e^2 + 2fP_e^2) - y^2 \cdot 6hX_e(Y_e + 2h) +$$
$$+ x \cdot 6hX_e^2(Y_e + 3h) + y \cdot 3hX_eY_e(2Y_e + 3h) - 3h^2X_e^3 = 0.$$

Wendet man auf die erste der beiden Gleichungen die Substitution (44) an, so gehen die Koeffizienten von x^2, y^2, x und y, sowie das Absolutglied in die entsprechenden Terme der zweiten Gleichung über, abgesehen von einem gemeinsamen Faktor. Die Koeffizienten xy hingegen bleiben verschieden, wenn nicht k_e auf (45) liegt. Es fallen also im allgemeinen die beiden aus den Büscheln ausgewählten Kegelschnitte nicht zusammen, aber ihre vier Schnittpunkte liegen auf den Koordinatenachsen. Damit ist gezeigt:

Wird einem beliebigen Punkte k_e mittels (44) ein Punkt K_e zugeordnet, so läßt sich aus dem zu k_e und K_e gehörenden Büscheln je ein Kegelschnitt so auswählen, daß sich diese beiden Kegelschnitte auf den Koordinatenachsen schneiden.

Wir beschließen unsere Betrachtungen mit einer analogen Untersuchung für den vorausgenommenen elliptischen Fall. Dort gehören einem Punkte K_e nur drei Punkte K_1, K_2, K_3 zu. Man kann die Frage aufwerfen: Wie müssen zwei Punkte k_e und K_e gelegen sein, damit durch die ihnen entsprechenden sechs Punkte ein Kegelschnitt gelegt werden kann?

Die drei Punkte, die einem K_e zugeordnet sind, können als Grundpunkte eines Kegelschnittnetzes genommen werden; insofern gehört dann jedem K_e ein Netz zu. Dieses aber ist bestimmt, wenn von ihm drei linear unabhängige Kegelschnitte bekannt sind. Zwei solche haben wir schon aufgestellt, nämlich:

$$1)\quad x^2+y^2-x_e x-y_e y=0 \quad (\S\ 1,\ \mathrm{VII}\beta)$$

$$2)\quad x_e x^2+(y_e+\tfrac{2}{3}r)xy-\tfrac{2}{3}rx_e y=0 \quad [\S\ 3,\ (9)].$$

Einen dritten Kegelschnitt kann man sich durch die Methode der unbestimmten Koeffizienten verschaffen, wie wir es in § 8 getan haben. Wir wählen hier:

$$3)\quad x^2[x_e^2+(y_e+\tfrac{2}{3}r)^2]-\tfrac{4}{3}rx_e(y_e+\tfrac{2}{3}r)x-\tfrac{2}{3}rx_e^2 y+ \\ +\tfrac{2}{3}rx_e^2(y_e+\tfrac{2}{3}r)=0.$$

Multiplizieren wir die erste der drei Gleichungen mit λ, die zweite mit $-\mu$ und addieren sie dann zur dritten, so ergibt sich die Gleichung des Netzes in der Form:

$$x^2\{\lambda-\mu x_e+x_e^2+(y_e+\tfrac{2}{3}r)^2\}-xy\mu(y_e+\tfrac{2}{3}r)+y^2\lambda-$$
$$-x\{\lambda x_e+\tfrac{4}{3}rx_e(y_e+\tfrac{2}{3}r)\}+y\{\tfrac{2}{3}rx_e\mu-y_e\lambda-\tfrac{2}{3}rx_e^2\}+$$
$$+\tfrac{2}{3}rx_e^2(y_e+\tfrac{2}{3}r)=0.$$

Soll nun ein Kegelschnitt durch die drei zu k_e gehörenden Punkte gehen, so muß er in dem Netz, das k_e bestimmt, enthalten sein; soll er gleichzeitig durch die zu einem anderen Punkte K_e gehörenden drei Punkte gehen, so muß er sich in dem Netz vorfinden, das zu K_e gehört:

$$x^2\{\Lambda-MX_e+X_e^2+(Y_e+\tfrac{2}{3}r)^2\}-xyM(Y_e+\tfrac{2}{3}r)+y^2\Lambda-$$
$$-x\{\Lambda X_e+\tfrac{4}{3}rX_e(Y_e+\tfrac{2}{3}r)\}+y\{\tfrac{2}{3}rX_eM-Y_e\Lambda-\tfrac{2}{3}rX_e^2\}+$$
$$+\tfrac{2}{3}rX_e^2(Y_e+\tfrac{2}{3}r)=0.$$

Die Koeffizientenvergleichung ergibt fünf Beziehungen zwischen den acht Größen x_e, y_e, λ, μ, X_e, Y_e, Λ, M oder eine Beziehung zwischen x_e, y_e, X_e, Y_e. Durch diese Überlegung ist das Resultat gefunden:

Zu jedem Punkte k_e gibt es ∞^1 Punkte K_e derart, daß durch die ihnen entsprechenden sechs Punkte ein Kegelschnitt gelegt werden kann.

Die Durchführung der Elimination hat nun zu zeigen, welche Kurve die einem Punkte k_e auf diese Weise zugeordneten Punkte K_e erfüllen. Dividiert man die erste Büschelgleichung mit λ, die zweite mit Λ, so findet man durch Vergleichen der Koeffizienten von x^2, xy, x und des Absolutgliedes:

$$\lambda=\tfrac{4}{3}r\frac{x_e(y_e+\frac{2}{3}r)}{X_e}\qquad\qquad \Lambda=\tfrac{4}{3}r\frac{X_e(Y_e+\frac{2}{3}r)}{x_e}$$

$$\mu=\frac{X_e^2(Y_e+\frac{2}{3}r)[x_e^2+(y_e+\frac{2}{3}r)^2]-x_e^2(y_e+\frac{2}{3}r)[X_e^2+(Y_e+\frac{2}{3}r)^2]}{X_e^2[x_e(Y_e+\frac{2}{3}r)-X_e(y_e+\frac{2}{3}r)]}$$

$$M=\frac{x_e^2(y_e+\frac{2}{3}r)[X_e^2+(Y_e+\frac{2}{3}r)^2]-X_e^2(Y_e+\frac{2}{3}r)[x_e^2+(y_e+\frac{2}{3}r)^2]}{x_e^2[X_e(y_e+\frac{2}{3}r)-x_e(Y_e+\frac{2}{3}r)]}.$$

Setzt man endlich noch die Koeffizienten von y einander gleich und führt die oben gefundenen Werte ein, so folgt:

$$[X_e(y_e+\tfrac{2}{3}r)-x_e(Y_e+\tfrac{2}{3}r)][X_e^2(y_e+\tfrac{2}{3}r)-x_e^2(Y_e+\tfrac{2}{3}r)+ \\ +2x_eX_e(Y_e-y_e)]=0.$$

Verschwindet der erste Faktor der linken Seite, so wird einem Punkte k_e jeder Punkt K_e derjenigen Geraden zugeordnet, die k_e mit dem Fundamentalpunkte $D(0\,|\,-\frac{2}{3}r)$ verbindet. In der Tat haben wir ja festgestellt (§ 3), daß die drei Punkte K_1, K_2, K_3, die irgend einem Punkte jener Geraden entsprechen, auf einer für diese Gerade charakteristischen Hyperbel gelegen sind. Es ist demnach hier sogar mehr erfüllt, als in unserer Fragestellung lag: Greift man nämlich irgend zwei Punkte auf einer durch D laufenden Geraden heraus, so läßt sich durch die entsprechenden sechs Punkte nicht nur ein Kegelschnitt legen, sondern es ergibt sich sogar für alle Punktpaare K_e, k_e auf der Geraden ein und derselbe Kegelschnitt, der die sechs entsprechenden Punkte trägt, nämlich die Hyperbel

$$x^2+xy\frac{y_e+\frac{2}{3}r}{x_e}-\frac{2}{3}ry=0.$$

Zu einem für uns neuen Resultate kommen wir hingegen, wenn wir den zweiten Faktor der linken Seite obiger Gleichung gleich Null setzen. Wir betrachten irgend einen festen Punkt k_e mit seinem zugehörenden Tripel k_1, k_2, k_3 und einem variablen Punkt K_e mit dem Tripel K_1, K_2, K_3. Dann können wir den Satz aussprechen:

Liegt K_e auf dem Kegelschnitt

$$X^2(y_e+\tfrac{2}{3}r)-x_e^2(Y+\tfrac{2}{3}r)+2x_eX(Y-y_e)=0,$$

so läßt sich durch die sechs Punkte k_1, k_2, k_3, K_1, K_2, K_3 ein Kegelschnitt legen.

Lebenslauf.

Am 19. März 1886 wurde ich, Oskar Arno Kleber, zu Nenntmansdorf bei Pirna geboren. Ich bin ev.-luther. Konfession. Nach $4^1/_2$ Jahren Vorschule besuchte ich von Michaelis 1896 an das Kgl. Gymnasium in Dresden-N., das ich Ostern 1905 mit dem Reifezeugnis verließ.

An der Technischen Hochschule in Dresden studierte ich dann von Ostern 1905 bis Ostern 1909 Mathematik und Physik und legte im Juni 1909 die Prüfung für Kandidaten des höheren Schulamts ab. Im Sommersemester 1909 studierte ich noch weiter Mathematik an der Universität Rostock, im Wintersemester 1909/10 und im Sommer 1910 an der Universität Göttingen. Von August bis Ende 1910 gehörte ich dem pädagogischen Seminar in Döbeln an und bin jetzt als Probelehrer am Vitzthumschen Gymnasium in Dresden tätig.

Allen meinen verehrten Lehrern, insbesondere aber den Herren Geh. Hofrat Krause und Helm in Dresden und den Herren Geh. Hofrat Hilbert und Prof. Landau in Göttingen, fühle ich mich zu großem Danke verpflichtet. Herrn Geh. Hofrat Krause spreche ich auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus für die Anregung zur vorliegenden Arbeit und für sein dauerndes Interesse. Herrn Staatsrat Prof. Dr. Staude danke ich bestens für die Übernahme des Referates.